

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

תרגול 14

טורים כלליים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

שאלה 1

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:  
הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$$

מתכנס.

שאלה 2

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

קבעו אם הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} f(n^2)$  מתכנס.

**פתרון.** מכיוון ש-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1/x} = 1$$

הטור מתכנס.

שאלה 3

עבור אילו ערכי  $\alpha$  הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^\alpha}{n(n+1)\ln(4n+1)}$$

מתכנס?

**פתרון.** על-פי מבחן ההשוואה הגבולי, הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha} \ln n}$$

מתכנס. טור זה מתכנס לכל  $2 - \alpha > 1$ , כלומר לכל  $\alpha < 1$ .

#### שאלה 4

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan n \right)$  מתכנס.

**פתרון.** הטור מתכנס: טור לייבניץ.

#### שאלה 5

אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , אז

א. סדרת הסכומים החלקיים של הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חסומה.

ב. אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז גם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  מתכנס.

ג. הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} a_n^n$  מתכנס.

ד. אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 a_n$  מתכנס, אז גם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

ה. הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  מתכנס.

**פתרון.**

א. לא נכון. למשל, סדרת הסכומים החלקיים של הטור ההרמוני אינה חסומה מלמעלה.

ב. לא נכון. למשל, אם  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , אז  $\sum a_n$  מתכנס ואילו  $\sum |a_n|$  מתבדר.

ג. נכון. לפי מבחן השורש,

$$\sqrt[n]{|(-1)^{n^2} a_n^n|} = |a_n| \rightarrow 0 < 1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט, ובפרט מתכנס.

ד. לא נכון. עבור  $a_n = \frac{1}{n}$  מתקיים

$$0 \leq \sin^2 \left( \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n^2}$$

ולכן  $\sum \sin^2 \left( \frac{1}{n} \right)$  מתכנס, אבל  $\sum \frac{1}{n}$  מתבדר.

ה. לא נכון. עבור  $a_n = \frac{1}{\ln n}$ , החל ממוקם שבו הביטוי מוגדר, מתקיים  $a_n \rightarrow 0$ , אבל

$$\sum \frac{a_n}{n} = \sum \frac{1}{n \ln n}$$

הוא טור מתבדר ידוע.

## שאלה 6

הראו שאם הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

מתכנסים, אז גם הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$$

מתכנסים.

**פתרון.** לכל שני מספרים ממשיים  $a$  ו- $b$  מתקיים

$$(a + b)^2 \geq 0 \implies -2ab \leq a^2 + b^2$$

ובאופן דומה

$$(a - b)^2 \geq 0 \implies 2ab \leq a^2 + b^2$$

כלומר  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  או

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

מכאן נובע שלכל  $n$  טבעי מתקיים

$$|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

על-פי הנתון הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$  מתכנס, ולכן על-פי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים גם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \text{ מתכנס.}$$

מהתכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$  נובע שגם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס. מאחר ש- $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2$ ,הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$  הוא סכום של שלושה טורים מתכנסים ולכן גם הוא מתכנס.

## שאלה 7

עבור אילו ערכי  $\alpha$  הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^{\alpha-2})}{n^\alpha}$$

מתכנס?

**פתרון.** אם  $\alpha > 1$ , אז

$$\left| \frac{\sin(n^{\alpha-2})}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

ולכן הטור מתכנס.

אם  $\alpha \leq 1$ , אז  $\alpha - 2 < 0$ , ולכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin(n^{\alpha-2})}{n^\alpha}}{\frac{n^\alpha}{n^{\alpha-2}}} = 1$$

מאחר ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-2}}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

מתכנס, גם הטור הנתון מתכנס.

כלומר, הטור מתכנס לכל ערך של  $\alpha$ .

## שאלה 8

מבין הטורים הבאים הטור המתכנס היחיד הוא

א.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos n - \cos(n+1))$

ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

ד.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

ה.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

פתרון. הטור המתכנס היחיד הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$$

זהו טור לייבניץ.

## לעיון

## הגדרה: סכומים חלקיים

יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור מספרים. הסכום החלקי ה- $n$  של הטור הוא המספר

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

הסדרה  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  מכונה סדרת הסכומים החלקיים.

## הגדרה: התכנסות וסכום של טור

יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור מספרים. נאמר שהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת. במקרה כזה, הגבול  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  מכונה סכום הטור ונעניק לטור את המשמעות

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

אחרת, נאמר שהטור מתבדר.

**משפט: הטור ההנדסי**

עבור הטור ההנדסי  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ , ראינו שעבור  $q \neq 1$  מתקיים  $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . לכן אם  $|q| < 1$ , אז  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$ , ואם  $|q| > 1$  או  $q = -1$ , אז הגבול לא קיים. אם  $q = 1$ , אז  $s_n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  ולכן הטור שוב מתבדר. לסיכום,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

**משפט: תנאי הכרחי להתכנסות טור**

אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**משפט: תכונות של טורי מספרים**

נניח שהטורים  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנסים.

1. **לינאריות:** לכל  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  מתקיים שהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  מתכנס, ו-

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. **מונוטוניות:** אם  $a_n \leq b_n$  לכל  $n$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

3. **אדיטיביות:** לכל  $n_0 > 1$  מתקיים שהטור  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  מתכנס, ובנוסף

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

**משפט: מבחן ההשוואה**

נניח שלכל  $n$  מתקיים  $0 \leq a_n \leq b_n$ . אם  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ .

**משפט: מבחן ההשוואה הגבולי**

נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  טורים חיוביים. אם הגבול  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  קיים, אז:

• אם  $0 < L < \infty$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אם ורק אם  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס.

במקרה זה אומרים:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

• אם  $L = 0$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ .

• אם  $L = \infty$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ .

**משפט: מבחן השורש**

יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור חיובי, ונסמן  $q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ . אם  $q < 1$ , אז הטור מתכנס, ואם  $q > 1$ , אז הטור מתבדר.

**משפט: מבחן המנה**

יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור חיובי, ונניח שהגבול  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  קיים במובן הרחב. אם  $q < 1$ , אז הטור מתכנס, ואם  $q > 1$ , אז הטור מתבדר.

**משפט: מבחן האינטגרל**

תהי  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אי-שלילית יורדת. אז  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  מתכנס אם ורק אם  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  מתכנס.

**משפט: טור של חזקות**

הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  מתכנס אם ורק אם  $p > 1$ .

**הגדרה: התכנסות בהחלט ובתנאי**

יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור מספרים. נאמר שהטור מתכנס בהחלט אם  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ . אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט, נאמר שהוא מתכנס בתנאי.

**משפט: התכנסות בהחלט גוררת התכנסות**

אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס. בנוסף, במקרה זה מתקיים אי-שוויון המשולש

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

**משפט: מבחן לייבניץ**

תהי  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה יורדת שמקיימת  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . אז הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  מתכנס וסכום הטור  $S$  מקיים ש- $0 \leq S \leq a_1$ . בנוסף, לכל  $n$  מתקיים ש- $|S - S_n| \leq a_{n+1}$  ("השגיאה חסומה על ידי האיבר הבא").