

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

תרגול 14

טורים כלליים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

שאלה 1

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:
הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$$

מתכנס.

שאלה 2

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

קבעו אם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} f(n^2)$ מתכנס.

שאלה 3

עבור אילו ערכי α הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^\alpha}{n(n+1)\ln(4n+1)}$$

מתכנס?

שאלה 4

קבעו אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right)$ מתכנס.

שאלה 5

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אז

א. סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסומה.

ב. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

ג. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} a_n^n$ מתכנס.

ד. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 a_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ה. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ מתכנס.

שאלה 6

הראו שאם הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

מתכנסים, אז גם הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$$

מתכנסים.

שאלה 7

עבור אילו ערכי α הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^{\alpha-2})}{n^\alpha}$$

מתכנס?

שאלה 8

מבין הטורים הבאים הטור המתכנס היחיד הוא

א. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos n - \cos(n+1))$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

לעיון

הגדרה: סכומים חלקיים

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. הסכום החלקי ה- n של הטור הוא המספר

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

הסדרה $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ מכונה סדרת הסכומים החלקיים.

הגדרה: התכנסות וסכום של טור

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת. במקרה כזה, הגבול $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ מכונה סכום הטור ונעניק לטור את המשמעות

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

אחרת, נאמר שהטור מתבדר.

משפט: הטור ההנדסי

עבור הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, ראינו שעבור $q \neq 1$ מתקיים $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. לכן אם $|q| < 1$, אז $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$, ואם $|q| > 1$ או $q = -1$, אז הגבול לא קיים. אם $q = 1$, אז $s_n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ולכן הטור שוב מתבדר. לסיכום,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

משפט: תנאי הכרחי להתכנסות טור

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

משפט: תכונות של טורי מספרים

נניח שהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים.

1. **לינאריות:** לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ מתכנס, ו-

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2. **מונוטוניות:** אם $a_n \leq b_n$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. **אדיטיביות:** לכל $n_0 > 1$ מתקיים שהטור $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ מתכנס, ובנוסף

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

משפט: מבחן ההשוואה

נניח שלכל n מתקיים $0 \leq a_n \leq b_n$. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

משפט: מבחן ההשוואה הגבולי

נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים. אם הגבול $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים, אז:

• אם $0 < L < \infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

במקרה זה אומרים: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

• אם $L = 0$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

• אם $L = \infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

משפט: מבחן השורש

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, ונסמן $\sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. אם $q < 1$, אז הטור מתכנס, ואם $q > 1$, אז הטור מתבדר.

משפט: מבחן המנה

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, ונניח שהגבול $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים במובן הרחב. אם $q < 1$, אז הטור מתכנס, ואם $q > 1$, אז הטור מתבדר.

משפט: מבחן האינטגרל

תהי $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אי־שלילית יורדת. אז $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם ורק אם $\int_1^{\infty} f(x) dx$ מתכנס.

משפט: טור של חזקות

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$.

הגדרה: התכנסות בהחלט ובתנאי

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. נאמר שהטור מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט, נאמר שהוא מתכנס בתנאי.

משפט: התכנסות בהחלט גוררת התכנסות

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס. בנוסף, במקרה זה מתקיים אי-שוויון המשולש

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

משפט: מבחן לייבניץ

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת שמקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס וסכום הטור S מקיים ש- $0 \leq S \leq a_1$. בנוסף, לכל n מתקיים ש- $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ ("השגיאה חסומה על ידי האיבר הבא").