

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

13 תרגול

אינטגרלים מוכללים וטורים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

אינטגרלים מוכללים

שאלה 1

סמנו מהם כל האינטגרלים המתכנסים מבין האינטגרלים המוכללים הבאים:

$$\begin{aligned}
 &1. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^4}} \\
 &2. \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^4}} \\
 &3. \int_0^1 \ln x \, dx
 \end{aligned}$$

פתרון.

1. מתקיים

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - x^4}} = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{1 - x}\sqrt{1 + x}}$$

לכן ליד $x = 0$ ניתן להשוות את הפונקציה ל- $1/x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2 - x^4}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1$$

לכן האינטגרל $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^4}}$ מתנהג כמו $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x}$, כלומר מתבדר.

2. לפי אותו חישוב שבשורה הראשונה של פתרון 1, ליד $x = 1$ ניתן להשוות את הפונקציה ל- $1/\sqrt{1-x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2 - x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

לכן האינטגרל $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^4}}$ מתנהג כמו $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, שמתכנס (הצבה $t = 1 - x$), ולכן הוא מתכנס.

3.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \, dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \ln x \, dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) \Big|_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} (-1 - (c \ln c - c)) = -1 \end{aligned}$$

שאלה 2

נתון האינטגרל המוכלל

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha + 1}, \quad \alpha > 0$$

מצאו לאילו ערכי α האינטגרל מתכנס ולאילו ערכי α הוא מתבדר.

פתרון. הפונקציה באינטגרל היא חיובית לכל x .

עבור $\alpha > 0$ מתקיים

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x(\ln x)^\alpha + 1}}{\frac{1}{x(\ln x)^\alpha}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\ln x)^\alpha}{x(\ln x)^\alpha + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

לכן ממבחן ההשוואה הגבולי, האינטגרל הנתון והאינטגרל

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$$

מתכנסים ומתבדרים ביחד.

אם נציב $t = \ln x$, אז $dt = \frac{dx}{x}$, ומתקיים

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

האינטגרל שקיבלנו באגף ימין מתכנס עבור $\alpha > 1$ ומתבדר עבור $\alpha \leq 1$, וכך גם האינטגרל הנתון.

שאלה 3

יהיו $a, b > 0$ ממשיים.

א. חשבו את האינטגרל הלא-מסוים

$$\int e^{-ax} \sin(bx) dx$$

ב. עבור אילו ערכי $a, b > 0$ האינטגרל המוכלל הבא מתכנס?

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) dx$$

ג. חשבו את האינטגרל המוכלל עבור ערכי $a, b > 0$ שמצאתם בסעיף הקודם.

ד. האם קיימים ערכי $a, b > 0$ שעבורם האינטגרל המוכלל שואף ל- ∞ ? נמקו.

פתרון.

א. נשתמש פעמיים בנוסחת אינטגרציה בחלקים, $\int uv' = uv - \int u'v$:

$$\begin{aligned} \int e^{-ax} \sin(bx) dx &= -\frac{1}{b} e^{-ax} \cos(bx) - \frac{a}{b} \int e^{-ax} \cos(bx) dx \\ &= -\frac{1}{b} e^{-ax} \cos(bx) - \frac{a}{b} \left(\frac{1}{b} e^{-ax} \sin(bx) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{b} \int e^{-ax} \sin(bx) dx \right) \end{aligned}$$

קיבלנו

$$\int e^{-ax} \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} e^{-ax} \cos(bx) - \frac{a}{b^2} e^{-ax} \sin(bx) - \frac{a^2}{b^2} \int e^{-ax} \sin(bx) dx$$

כעת נותר לחלץ את האינטגרל המבוקש (כמו משוואה בנעלם אחד):

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{-ax} \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} e^{-ax} \cos(bx) - \frac{a}{b^2} e^{-ax} \sin(bx)$$

ולכן

$$\int e^{-ax} \sin(bx) dx = -\frac{b \cos(bx) + a \sin(bx)}{a^2 + b^2} e^{-ax} + C$$

ב. מחסימותה של $\sin(bx)$ מתקיים

$$\int_0^\infty |e^{-ax} \sin(bx)| dx \leq \int_0^\infty e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} \Big|_0^\infty = \frac{1}{a} \quad (\forall a > 0)$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה לפונקציות חיוביות, האינטגרל $\int_0^\infty |e^{-ax} \sin(bx)| dx$ מתכנס לכל $a, b > 0$ ממשיים. מההגדרה נקבל כי האינטגרל $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) dx$ מתכנס בהחלט לכל $a, b > 0$; לכן לפי משפט הוא מתכנס. כלומר, האינטגרל המוכלל מתכנס לכל $a, b > 0$. ניתן לחשב ישירות ולהראות קיום של גבול סופי.

ג. נשתמש בפונקציה הקדומה שמצאנו בסעיף א:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{b \cos(bx) + a \sin(bx)}{a^2 + b^2} e^{-ax} \right]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{b \cos(bt) + a \sin(bt)}{a^2 + b^2} e^{-at} + \frac{b}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

לחישוב הגבול השתמשנו באריתמטיקה ובמשפט "חסומה כפול שואפת לאפס".

ד. הראינו בסעיף ב כי האינטגרל המוכלל מתכנס לכל $a, b > 0$, לכן לא קיימים ערכים שעבורם האינטגרל המוכלל שואף ל- ∞ .

שאלה 4

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:
אם f רציפה בקרן $[0, \infty)$ והאינטגרל המוכלל

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

מתכנס, אז f חסומה ב- $[0, \infty)$.

פתרון. הטענה אינה נכונה. לדוגמה, נגדיר ל- $x > 0$

$$f(x) = 3x \cos(x^3) - \frac{\sin(x^3)}{x^2}$$

ונגדיר $f(0) = 0$. זוהי נגזרת של $\sin(x^3)/x$ עבור $x > 0$, ולכן האינטגרל המוכלל מתכנס. עם זאת, f אינה חסומה.

טורים

שאלה 5

קבעו אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n \cos(1/n))$ מתכנס.

פתרון. הטור לא מתכנס. האיבר הכללי בטור זה לא שואף לאפס.

שאלה 6

קבעו אם הסדר $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{\ln n}$ מתכנס.

פתרון. הסדר לא מתכנס. נשווה אותו לסדר $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, שאינו מתכנס. זאת ניתן לראות בעזרת מבחן האינטגרל:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^b = \infty$$

שאלה 7

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ סדר אי-שלילי המקיים

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n}{3}$$

לכל n . הוכיחו או הפריכו: הסדר מתכנס.

פתרון. הטענה נכונה. מהנתון $a_{n+1} \leq a_n/3$ נשים לב כי באופן אינדוקטיבי מתקיים

$$a_2 \leq \frac{a_1}{3}, \quad a_3 \leq \frac{a_2}{3} \leq \frac{a_1}{3 \cdot 3}, \quad a_4 \leq \frac{a_3}{3} \leq \frac{a_1}{3 \cdot 3 \cdot 3}, \quad \dots, \quad a_n \leq \frac{a_1}{3^{n-1}}$$

מאחר שנתון כי הסדרה אי-שלילית, נוכל לבצע את מבחן ההשוואה עם הסדר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{3^{n-1}}$$

זהו סדר הנדסי עם $a_1 \geq 0$ ומנה $q = 1/3 < 1$, ולכן הוא סדר מתכנס.

לעיון

משפט: עיקרון האינדוקציה

נניח שנתונה סדרה של טענות (כלומר, טענה מס' 1, טענה מס' 2, טענה מס' 3 וכן הלאה) כך שטענה מספר 1 נכונה, וכן מתוך נכונות טענה n נובעת נכונות טענה $n+1$. אז כל הטענות שבסדרה הן טענות נכונות.

משפט: אינטגרציה בחלקים

תהיינה $u(x)$ ו- $v(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$. אם u, v גזירות פרט (אולי) למספר סופי של נקודות בקטע $[a, b]$, ובנוסף u', v' פונקציות אינטגרביליות, אז

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

משפט: שיטת ההצבה

נוסחת ההצבה

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

נכונה, בתנאי שמתקיימים התנאים הבאים:

- הפונקציה f רציפה בקטע I , אשר מכיל את הנקודות a, b .
- הפונקציה $\varphi : J \rightarrow I$ רציפה בקטע J , ובנוסף, בכל תת-קטע סגור וחסום של J , היא גזירה פרט

למספר סופי של נקודות עם נגזרת φ' אינטגרבילית (בתת-הקטע הסגור והחסום).
 3. הקטע J מכיל את הנקודות α, β , ומתקיים כי $\varphi(\alpha) = a$ ו- $\varphi(\beta) = b$.

הגדרה: אינטגרל על קרן

תהי $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נניח שלכל $x > a$, הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a, x]$. נגדיר את האינטגרל המוכלל של f בקרן $[a, \infty)$ על ידי הגבול

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

אם $\int_a^\infty f(t) dt$ מוגדר וסופי, נאמר שהאינטגרל המוכלל מתכנס. אחרת, נאמר שהוא מתבדר.

הגדרה: אינטגרל עם נקודה סינגולרית

תהי $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת שלכל $a < x < b$, הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[x, b]$. נגדיר את האינטגרל המוכלל של f על ידי

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

אם $\int_a^b f(t) dt$ מוגדר וסופי, נאמר שהאינטגרל המוכלל מתכנס. אחרת, נאמר שהוא מתבדר.

משפט: אינטגרל מוכלל של חזקה

יהי $a > 0$, ויהי $p \in \mathbb{R}$.

1. האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$.
2. האינטגרל $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ מתכנס אם ורק אם $p < 1$.

משפט: מבחן ההשוואה לאינטגרנדים אי-שליליים

1. אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in [a, \infty)$ ושתייהן אינטגרביליות בקטע $[a, x]$ לכל $x > a$, ואם $\int_a^\infty g(x) dx < \infty$, אז $\int_a^\infty f(x) dx < \infty$.
2. אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in (a, b]$ ושתייהן אינטגרביליות בקטע $[x, b]$ לכל $a < x < b$, ואם $\int_a^b g(x) dx < \infty$, אז $\int_a^b f(x) dx < \infty$.

משפט: מבחן ההשוואה הגבולי לאינטגרנדים אי-שליליים

1. נניח כי f, g מוגדרות ואי-שליליות לכל $x \in [a, \infty)$ ואינטגרביליות בקטע $[a, x]$ לכל $x > a$. אם הגבול $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב, אז:
 - אם $L < \infty$, אז $\int_a^\infty f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty g(x) dx < \infty$.
 - אם $L > 0$, אז $\int_a^\infty f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty g(x) dx < \infty$.
 2. נניח כי f, g מוגדרות ואי-שליליות לכל $x \in (a, b]$ ואינטגרביליות בקטע $[x, b]$ לכל $a < x < b$. אם הגבול $L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב, אז:
 - אם $L < \infty$, אז $\int_a^b f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx < \infty$.
 - אם $L > 0$, אז $\int_a^b f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx < \infty$.
- לכן בשני המקרים, אם $0 < L < \infty$, אז שני האינטגרלים המוכללים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הגדרה: התכנסות בהחלט

1. תהי $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[a, x]$ לכל $x > a$. נאמר שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty$.
2. תהי $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית בקטע $[x, b]$ לכל $a < x < b$. נאמר שהאינטגרל $\int_a^b f(x) dx$

מתכנס בהחלט אם $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$.
 3. באופן כללי, נאמר כי $\int_I f(x) dx$ מתכנס בהחלט אם לאחר פיצול, כל מחובר מתכנס בהחלט.

משפט: התכנסות בהחלט גוררת התכנסות

אם אינטגרל מוכלל מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס. בנוסף, במקרה זה מתקיים אי-שוויון המשולש האינטגרלי

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx$$

הגדרה: סכומים חלקיים

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. הסכום החלקי ה- n של הטור הוא המספר

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

הסדרה $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ מכונה סדרת הסכומים החלקיים.

הגדרה: התכנסות וסכום של טור

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מספרים. נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת. במקרה כזה, הגבול $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ מכונה סכום הטור ונעניק לטור את המשמעות

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

אחרת, נאמר שהטור מתבדר.

משפט: הטור ההנדסי

עבור הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, ראינו שעבור $q \neq 1$ מתקיים $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. לכן אם $|q| < 1$, אז $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$, ואם $|q| > 1$ או $q = -1$, אז הגבול לא קיים. אם $q = 1$, אז $s_n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ולכן הטור שוב מתבדר. לסיכום,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

משפט: תנאי הכרחי להתכנסות טור

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

משפט: מבחן ההשוואה

נניח שלכל n מתקיים $0 \leq a_n \leq b_n$. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

משפט: מבחן ההשוואה הגבולי

נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים. אם הגבול $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים, אז:

• אם $0 < L < \infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

במקרה זה אומרים: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

• אם $L = 0$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

• אם $L = \infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

משפט: מבחן האינטגרל

תהי $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אי־שלילית יורדת. אז $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם ורק אם $\int_1^{\infty} f(x) dx$ מתכנס.