

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

## 13 תרגול

## אינטגרלים מוכללים וטורים

יוחאי מעין

## הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

## אינטגרלים מוכללים

## שאלה 1

סמנו מהם כל האינטגרלים המתכנסים מבין האינטגרלים המוכללים הבאים:

$$\begin{aligned}
 &1. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^4}} \\
 &2. \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^4}} \\
 &3. \int_0^1 \ln x \, dx
 \end{aligned}$$

## שאלה 2

נתון האינטגרל המוכלל

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha + 1}, \quad \alpha > 0$$

מצאו לאילו ערכי  $\alpha$  האינטגרל מתכנס ולאילו ערכי  $\alpha$  הוא מתבדר.

**שאלה 3**

יהיו  $a, b > 0$  ממשיים.

א. חשבו את האינטגרל הלא-מסוים

$$\int e^{-ax} \sin(bx) dx$$

ב. עבור אילו ערכי  $a, b > 0$  האינטגרל המוכלל הבא מתכנס?

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) dx$$

ג. חשבו את האינטגרל המוכלל עבור ערכי  $a, b > 0$  שמצאתם בסעיף הקודם.

ד. האם קיימים ערכי  $a, b > 0$  שעבורם האינטגרל המוכלל שואף ל- $\infty$ ? נמקו.

**שאלה 4**

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:  
אם  $f$  רציפה בקרן  $[0, \infty)$  והאינטגרל המוכלל

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

מתכנס, אז  $f$  חסומה ב- $[0, \infty)$ .

**טורים****שאלה 5**

קבעו אם הטור  $\sum_{n=1}^\infty (1 + (-1)^n \cos(1/n))$  מתכנס.

**שאלה 6**

קבעו אם הטור  $\sum_{n=2}^\infty \frac{\sin(1/n)}{\ln n}$  מתכנס.

**שאלה 7**

יהי  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  טור אי-שלילי המקיים

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n}{3}$$

לכל  $n$ . הוכיחו או הפריכו: הטור מתכנס.

## לעיון

## משפט: עיקרון האינדוקציה

נניח שנתונה סדרה של טענות (כלומר, טענה מס' 1, טענה מס' 2, טענה מס' 3 וכן הלאה) כך שטענה מספר 1 נכונה, וכן מתוך נכונות טענה  $n$  נובעת נכונות טענה  $n + 1$ . אז כל הטענות שבסדרה הן טענות נכונות.

## משפט: אינטגרציה בחלקים

תהיינה  $u(x)$  ו- $v(x)$  רציפות בקטע  $[a, b]$ . אם  $u, v$  גזירות פרט (אולי) למספר סופי של נקודות בקטע  $[a, b]$ , ובנוסף  $u', v'$  פונקציות אינטגרביליות, אז

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

## משפט: שיטת ההצבה

נוסחת ההצבה

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

נכונה, בתנאי שמתקיימים התנאים הבאים:

1. הפונקציה  $f$  רציפה בקטע  $I$ , אשר מכיל את הנקודות  $a, b$ .
2. הפונקציה  $\varphi : J \rightarrow I$  רציפה בקטע  $J$ , ובנוסף, בכל תת-קטע סגור וחסום של  $J$ , היא גזירה פרט למספר סופי של נקודות עם נגזרת  $\varphi'$  אינטגרבילית (בתת-הקטע הסגור והחסום).
3. הקטע  $J$  מכיל את הנקודות  $\alpha, \beta$ , ומתקיים כי  $\varphi(\alpha) = a$  ו- $\varphi(\beta) = b$ .

## הגדרה: אינטגרל על קרן

תהי  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה. נניח שלכל  $x > a$ , הפונקציה  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, x]$ . נגדיר את האינטגרל המוכלל של  $f$  בקרן  $[a, \infty)$  על ידי הגבול

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

אם  $\int_a^\infty f(t) dt$  מוגדר וסופי, נאמר שהאינטגרל המוכלל מתכנס. אחרת, נאמר שהוא מתבדר.

## הגדרה: אינטגרל עם נקודה סינגולרית

תהי  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה שמקיימת שלכל  $a < x < b$ , הפונקציה  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[x, b]$ . נגדיר את האינטגרל המוכלל של  $f$  על ידי

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

אם  $\int_a^b f(t) dt$  מוגדר וסופי, נאמר שהאינטגרל המוכלל מתכנס. אחרת, נאמר שהוא מתבדר.

## משפט: אינטגרל מוכלל של חזקה

יהי  $a > 0$  ויהי  $p \in \mathbb{R}$

1. האינטגרל המוכלל  $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$  מתכנס אם ורק אם  $p > 1$ .
2. האינטגרל  $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$  מתכנס אם ורק אם  $p < 1$ .

## משפט: מבחן ההשוואה לאינטגרנדים אי-שליליים

1. אם  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \in [a, \infty)$  ושתייהן אינטגרביליות בקטע  $[a, x]$  לכל  $x > a$ , ואם  $\int_a^\infty g(x) dx < \infty$ , אז  $\int_a^\infty f(x) dx < \infty$ .

2. אם  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \in (a, b]$  ושתייהן אינטגרביליות בקטע  $[x, b]$  לכל  $a < x < b$ , ואם  $\int_a^b g(x) dx < \infty$ , אז  $\int_a^b f(x) dx < \infty$ .

#### משפט: מבחן ההשוואה הגבולי לאינטגרנדים אי-שליליים

1. נניח כי  $f, g$  מוגדרות ואי-שליליות לכל  $x \in [a, \infty)$  ואינטגרביליות בקטע  $[a, x]$  לכל  $x > a$ . אם

הגבול  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  קיים במובן הרחב, אז:

- אם  $L < \infty$ , אז  $\int_a^\infty g(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty f(x) dx < \infty$ .
- אם  $L > 0$ , אז  $\int_a^\infty f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty g(x) dx < \infty$ .

2. נניח כי  $f, g$  מוגדרות ואי-שליליות לכל  $x \in (a, b]$  ואינטגרביליות בקטע  $[x, b]$  לכל  $a < x < b$ . אם

הגבול  $L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  קיים במובן הרחב, אז:

- אם  $L < \infty$ , אז  $\int_a^b g(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx < \infty$ .
- אם  $L > 0$ , אז  $\int_a^b f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx < \infty$ .

לכן בשני המקרים, אם  $0 < L < \infty$ , אז שני האינטגרלים המוכללים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

#### הגדרה: התכנסות בהחלט

1. תהי  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית בקטע  $[a, x]$  לכל  $x > a$ . נאמר שהאינטגרל  $\int_a^\infty f(x) dx$  מתכנס בהחלט אם  $\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty$ .

2. תהי  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית בקטע  $[x, b]$  לכל  $a < x < b$ . נאמר שהאינטגרל  $\int_a^b f(x) dx$  מתכנס בהחלט אם  $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ .

3. באופן כללי, נאמר כי  $\int_I f(x) dx$  מתכנס בהחלט אם לאחר פיצול, כל מחובר מתכנס בהחלט.

#### משפט: התכנסות בהחלט גוררת התכנסות

אם אינטגרל מוכלל מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס. בנוסף, במקרה זה מתקיים אי-שוויון המשולש האינטגרלי

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx$$

#### הגדרה: סכומים חלקיים

יהי  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  טור מספרים. הסכום החלקי ה- $n$  של הטור הוא המספר

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

הסדרה  $(S_n)_{n=1}^\infty$  מכונה סדרת הסכומים החלקיים.

#### הגדרה: התכנסות וסכום של טור

יהי  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  טור מספרים. נאמר שהטור  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת. במקרה כזה, הגבול  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  מכונה סכום הטור ונעניק לטור את המשמעות

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = s$$

אחרת, נאמר שהטור מתבדר.

**משפט: הטור ההנדסי**

עבור הטור ההנדסי  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ , ראינו שעבור  $q \neq 1$  מתקיים  $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . לכן אם  $|q| < 1$ , אז  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$ , ואם  $|q| > 1$  או  $q = -1$ , אז הגבול לא קיים. אם  $q = 1$ , אז  $s_n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  ולכן הטור שוב מתבדר. לסיכום,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

**משפט: תנאי הכרחי להתכנסות טור**

אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**משפט: מבחן ההשוואה**

נניח שלכל  $n$  מתקיים  $0 \leq a_n \leq b_n$ . אם  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ .

**משפט: מבחן ההשוואה הגבולי**

נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  טורים חיוביים. אם הגבול  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  קיים, אז:

• אם  $0 < L < \infty$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אם ורק אם  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס.

במקרה זה אומרים:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

• אם  $L = 0$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ .

• אם  $L = \infty$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ .

**משפט: מבחן האינטגרל**

תהי  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ : פונקציה אי-שלילית יורדת. אז  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  מתכנס אם ורק אם  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  מתכנס.