

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1'

תרגול 12

המשפט היסודי ואינטגרלים מוכללים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

המשפט היסודי

שאלה 1

אם $F'(x) = e^{-|x|}$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $F(-1) = e^{-1}$, חשבו את $F(1)$.

פתרון. הפונקציה F' רציפה ולכן אינטגרלית ב- $[-1, 1]$, ומכיוון ש- F פונקציה קדומה שלה, לפי הנוסחה היסודית מתקיים

$$\begin{aligned} F(1) &= F(-1) + \int_{-1}^1 F'(x) dx \\ &= e^{-1} + \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= e^{-1} + e^x \Big|_{-1}^0 + (-e^{-x}) \Big|_0^1 \\ &= 2 - e^{-1} \end{aligned}$$

שאלה 2

תהי

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^2 \frac{dt}{\ln t} + \int_2^{x^2} \sqrt{1 + \sqrt{t}} dt$$

חשבו את $F'(-1)$.**פתרון.** נגזור לפי הכלל

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right)' = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

נקבל

$$F'(x) = -\frac{1}{\ln(e^{-x})} (-e^{-x}) + \sqrt{1 + \sqrt{x^2}} \cdot 2x$$

שימו לב כי $\sqrt{x^2} = |x|$, כי סימן השורש מוגדר כחיובי. לכן

$$F'(-1) = -\frac{1}{\ln(e)}(-e) + \sqrt{1+1} \cdot 2 \cdot (-1) = e - 2\sqrt{2}$$

שאלה 3

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:
אם

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = 0$$

לכל x ממשי, אז כל פונקציה קדומה של f מחזורית.

פתרון. הטענה נכונה. אם F פונקציה קדומה ל- f , אז

$$F(x+1) - F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$$

שאלה 4

עבור

$$G(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$$

האם מתקיים

$$? \int_{-1}^1 G'(x) dx = G(1) - G(-1)$$

נמקו.

פתרון. במקרה זה $G'(x) = 1$ לכל $x \neq 0$, ולכן

$$\int_{-1}^1 G'(x) dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

ואילו

$$G(1) - G(-1) = 2 - (-1) = 3$$

השוויון אינו מתקיים, מפני ש- G' אינה פונקציה קדומה של הפונקציה הקבועה 1 בכל הקטע $[-1, 1]$:
היא אינה רציפה, ואף אינה גזירה, בנקודה 0.

שאלה 5

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בקטע $[0, \infty)$ וגזירה בקטע $(0, \infty)$, ומקיימת $f(0) = 0$ ו- $0 < f'(x) \leq 1$. הראו כי

$$2 \int_0^x f(t) dt \geq f^2(x)$$

פתרון. מאחר ש- $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$ ו- $f(0) = 0$, מתקיים $f(x) > 0$ לכל $x > 0$. נגדיר

$$g(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$$

מתקיים $g(0) = 0$, ולכל $x > 0$,

$$g'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0$$

לכן $g(x) \geq 0$ לכל $x \geq 0$, כלומר

$$2 \int_0^x f(t) dt \geq f^2(x)$$

אינטגרלים מוכללים

שאלה 6

חשבו את האינטגרל

$$\int_4^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$$

פתרון. נציב $u = \sqrt{x}$ ונבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned} \int_4^\infty e^{-\sqrt{x}} dx &= 2 \int_2^\infty u e^{-u} du \\ &= 2 [-u e^{-u} - e^{-u}]_2^\infty \\ &= 6e^{-2} \end{aligned}$$

שאלה 7

נסמן

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

בדקו אם האינטגרל I מתכנס, ואם כן, מצאו חסם תחתון וחסם עליון לערכו.

פתרון. כדי להעריך את האינטגרל נפרק אותו לשני קטעים:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} + \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

בחלק הראשון, לכל $0 \leq x \leq 1$ מתקיים

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^4} \leq 1$$

ולכן

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} \leq 1$$

בחלק השני נשתמש בכך ש- $\frac{1}{1+x^4} \leq \frac{1}{x^4}$, ולכן

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^4} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-3}}{-3} \right|_1^b = \frac{1}{3}$$

נסכם ונקבל

$$\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{4}{3}$$

לעיון

הגדרה: פונקציה צוברת שטחתהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית. נגדיר $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

הפונקציה $F(x)$ נקראת הפונקציה הצוברת שטח של $f(x)$.**משפט: המשפט היסודי**תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית ונגדיר $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. אם f רציפה בנקודה x_0 , אז F גזירה בנקודה x_0 ו- $F'(x_0) = f(x_0)$ בקטע.**משפט: גזירת אינטגרל עם קצוות משתנים**אם f רציפה בקטע J ו- $\alpha, \beta: I \rightarrow J$ גזירות (כאשר I, J קטעים), אז

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x), \quad x \in I$$

משפט: נוסחת ניוטון-לייבניץתהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. אזי

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

משפט: המשפט היסודי: גרסה מלאהתהי f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ ו- F רציפה בקטע $[a, b]$. אם לכל נקודה פרט (אולי) למספר סופי של נקודות מתקיים כי F גזירה ו- $F'(x) = f(x)$, אז $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.**משפט: אינטגרציה בחלקים**תהיינה $u(x)$ ו- $v(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$. אם u, v גזירות פרט (אולי) למספר סופי של נקודות בקטע $[a, b]$, ובנוסף u', v' פונקציות אינטגרביליות, אז

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

משפט: שיטת ההצבה

נוסחת ההצבה

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

נכונה, בתנאי שמתקיימים התנאים הבאים:

1. הפונקציה f רציפה בקטע I , אשר מכיל את הנקודות a, b .
2. הפונקציה $\varphi : J \rightarrow I$ רציפה בקטע J , ובנוסף, בכל תת-קטע סגור וחסום של J , היא גזירה פרט למספר סופי של נקודות עם נגזרת φ' אינטגרבילית (בתת-הקטע הסגור והחסום).
3. הקטע J מכיל את הנקודות α, β , ומתקיים כי $\varphi(\alpha) = a$ ו- $\varphi(\beta) = b$.

הגדרה: אינטגרל על קרן

תהי $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נניח שלכל $x > a$, הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a, x]$. נגדיר את האינטגרל המוכלל של f בקרן $[a, \infty)$ על ידי הגבול

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

אם $\int_a^\infty f(t) dt$ מוגדר וסופי, נאמר שהאינטגרל המוכלל מתכנס. אחרת, נאמר שהוא מתבדר.

הגדרה: עיקרון הפיצול

עד כה הגדרנו אינטגרל מוכלל $\int_a^b f$ במקרים הבאים בלבד:

1. $a = -\infty$ או $b = \infty$, אבל לא שניהם, ואין נקודות סינגולריות.
 2. a נקודה סינגולרית ולא אף נקודה אחרת, או b נקודה סינגולרית ולא אף נקודה אחרת.
- בכל מקרה אחר, מגדירים את האינטגרל המוכלל על ידי עיקרון הפיצול: מפצלים את האינטגרל לסכום של אינטגרלים שכל אחד מהם הוא מהסוג הנ"ל.

משפט: אינטגרל מוכלל של חזקה

יהי $a > 0$, ויהי $p \in \mathbb{R}$.

1. האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$.
2. האינטגרל $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ מתכנס אם ורק אם $p < 1$.

משפט: מבחן ההשוואה לאינטגרנדים אי-שליליים

1. אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in [a, \infty)$ ושניהן אינטגרביליות בקטע $[a, x]$ לכל $x > a$, ואם $\int_a^\infty g(x) dx < \infty$, אז $\int_a^\infty f(x) dx < \infty$.
2. אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in (a, b]$ ושניהן אינטגרביליות בקטע $[x, b]$ לכל $a < x < b$, ואם $\int_a^b g(x) dx < \infty$, אז $\int_a^b f(x) dx < \infty$.