

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

תרגול 12

המשפט היסודי ואינטגרלים מוכללים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

המשפט היסודי

שאלה 1

אם $F'(x) = e^{-|x|}$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $F(-1) = e^{-1}$, חשבו את $F(1)$.

שאלה 2

תהי

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^2 \frac{dt}{\ln t} + \int_2^{x^2} \sqrt{1 + \sqrt{t}} dt$$

חשבו את $F'(-1)$.

שאלה 3

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:

אם

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = 0$$

לכל x ממשי, אז כל פונקציה קדומה של f מחזורית.

שאלה 4

עבור

$$G(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$$

האם מתקיים

$$\int_{-1}^1 G'(x) dx = G(1) - G(-1) \quad ?$$

נמקו.

שאלה 5

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בקטע $[0, \infty)$ וגזירה בקטע $(0, \infty)$, ומקיימת $f(0) = 0$ ו- $0 < f'(x) \leq 1$. הראו כי

$$2. \int_0^x f(t) dt \geq f^2(x)$$

אינטגרלים מוכללים

שאלה 6

חשבו את האינטגרל

$$\int_4^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$$

שאלה 7

נסמן

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

בדקו אם האינטגרל I מתכנס, ואם כן, מצאו חסם תחתון וחסם עליון לערכו.

לעיון

הגדרה: פונקציה צוברת שטח

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית. נגדיר $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

הפונקציה $F(x)$ נקראת הפונקציה הצוברת שטח של $f(x)$.

משפט: המשפט היסודי

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית ונגדיר $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. אם f רציפה בנקודה x_0 , אז F גזירה בנקודה x_0 ו- $F'(x_0) = f(x_0)$ בקטע.

משפט: גזירת אינטגרל עם קצוות משתנים

אם f רציפה בקטע J ו- $\alpha, \beta: I \rightarrow J$ גזירות (כאשר I, J קטעים), אז

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x), \quad x \in I$$

משפט: נוסחת ניוטון-לייבניץ

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. אזי

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

משפט: המשפט היסודי: גרסה מלאה

תהי f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ ו- F רציפה בקטע $[a, b]$. אם לכל נקודה פרט (אולי) למספר סופי של נקודות מתקיים כי F גזירה ו- $F'(x) = f(x)$, אז $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

משפט: אינטגרציה בחלקים

תהיינה $u(x)$ ו- $v(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$. אם u, v גזירות פרט (אולי) למספר סופי של נקודות בקטע $[a, b]$, ובנוסף u', v' פונקציות אינטגרביליות, אז

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

משפט: שיטת ההצבה

נוסחת ההצבה

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

נכונה, בתנאי שמתקיימים התנאים הבאים:

1. הפונקציה f רציפה בקטע I , אשר מכיל את הנקודות a, b .
2. הפונקציה $\varphi: J \rightarrow I$ רציפה בקטע J , ובנוסף, בכל תת-קטע סגור וחסום של J , היא גזירה פרט למספר סופי של נקודות עם נגזרת φ' אינטגרבילית (בתת-הקטע הסגור והחסום).
3. הקטע J מכיל את הנקודות α, β , ומתקיים כי $\varphi(\alpha) = a$ ו- $\varphi(\beta) = b$.

הגדרה: אינטגרל על קרן

תהי $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נניח שלכל $x > a$, הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a, x]$. נגדיר את האינטגרל המוכלל של f בקרן $[a, \infty)$ על ידי הגבול

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

אם $\int_a^\infty f(t) dt$ מוגדר וסופי, נאמר שהאינטגרל המוכלל מתכנס. אחרת, נאמר שהוא מתבדר.

הגדרה: עיקרון הפיצול

עד כה הגדרנו אינטגרל מוכלל $\int_a^b f$ במקרים הבאים בלבד:

1. $a = -\infty$ או $b = \infty$, אבל לא שניהם, ואין נקודות סינגולריות.
 2. a נקודה סינגולרית ולא אף נקודה אחרת, או ש- b נקודה סינגולרית ולא אף נקודה אחרת.
- בכל מקרה אחר, מגדירים את האינטגרל המוכלל על ידי עיקרון הפיצול: מפצלים את האינטגרל לסכום של אינטגרלים שכל אחד מהם הוא מהסוג הנ"ל.

משפט: אינטגרל מוכלל של חזקהיהי $a > 0$, ויהי $p \in \mathbb{R}$ 1. האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$.2. האינטגרל $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ מתכנס אם ורק אם $p < 1$.**משפט: מבחן ההשוואה לאינטגרנדים אי-שליליים**1. אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in [a, \infty)$ ושתייהן אינטגרביליות בקטע $[a, x]$ לכל $x > a$, ואם $\int_a^\infty g(x) dx < \infty$, אז $\int_a^\infty f(x) dx < \infty$.2. אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in (a, b]$ ושתייהן אינטגרביליות בקטע $[x, b]$ לכל $a < x < b$, ואם $\int_a^b g(x) dx < \infty$, אז $\int_a^b f(x) dx < \infty$.