

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

11 תרגול

פונקציות קדומות ואינטגרל רימן

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

פונקציות קדומות

שאלה 1

חשבו את האינטגרל

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

פתרון. מציבים $t = \cos x$ ואז $dt = -\sin x \, dx$, ומכאן

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx &= - \int \sin^2 x \cos^2 x (-\sin x \, dx) \\ &= - \int (1 - t^2) t^2 \, dt \\ &= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

שאלה 2

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx$$

פתרון. דרך א:מציבים $t = \cos x$ ומקבלים $dt = -\sin x \, dx$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx &= - \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} (-\sin x \, dx) \\
 &= - \int \frac{1-t^2}{t} \, dt \\
 &= - \int \frac{1}{t} \, dt + \int t \, dt \\
 &= -\ln|t| + \frac{1}{2}t^2 + C \\
 &= -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\cos^2 x + C
 \end{aligned}$$

דרך ב:מציבים $t = \sin x$ ומקבלים $dt = \cos x \, dx$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \cos x \, dx \\
 &= \int \frac{t^3}{1-t^2} \, dt \\
 &= \int \frac{t^3 - t + t}{1-t^2} \, dt \\
 &= - \int t \, dt + \int \frac{t}{1-t^2} \, dt \\
 &= -\frac{1}{2}t^2 + \int \left(\frac{1/2}{1-t} - \frac{1/2}{1+t} \right) \, dt \\
 &= -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| + C \\
 &= -\frac{1}{2}\sin^2 x - \ln \sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)} + C \\
 &= -\frac{1}{2}\sin^2 x - \ln|\cos x| + C
 \end{aligned}$$

שאלה 3

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{1}{\cos t} \, dt$$

פתרון.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\cos t} \, dt &= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t} \, dt \\
 &= \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t} \, dt
 \end{aligned}$$

נשתמש בהצבה

$$w = \sin t, \quad dw = \cos t \, dt$$

ונקבל

$$\begin{aligned}\int \frac{dw}{1-w^2} &= \int \frac{1}{(1-w)(1+w)} dw \\ &= - \int \frac{1}{(w-1)(w+1)} dw\end{aligned}$$

ועל-ידי שימוש בפירוק לשברים חלקיים נקבל כי

$$\frac{1}{(w-1)(w+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w+1} \right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}- \int \frac{1}{(w-1)(w+1)} dw &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{w+1} - \frac{1}{w-1} \right) dw \\ &= \frac{1}{2} (\ln|w+1| - \ln|w-1|) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{w+1}{w-1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} \right| + C\end{aligned}$$

שאלה 4הפונקציות f, g הפוכות זו לזו וגזירות, וידוע כי

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

הוכיחו כי

$$\int g(x) dx = xg(x) - F(g(x)) + C$$

פתרון. דרך א:

גוזרים את שני אגפי הנוסחה, משתמשים בגזירה בכלל השרשרת, ומשתמשים בכך ש- f, g פונקציות הפוכות ולכן $f(g(x)) = x$:

$$\begin{aligned}(xg(x) - F(g(x)))' &= g(x) + xg'(x) - F'(g(x))g'(x) \\ &= g(x) + xg'(x) - f(g(x))g'(x) \\ &= g(x) + xg'(x) - xg'(x) \\ &= g(x)\end{aligned}$$

דרך ב:

אינטגרציה בחלקים, ומשתמשים בכך ש- f, g פונקציות הפוכות ולכן $f(g(x)) = x$:

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot g(x) dx &= xg(x) - \int xg'(x) dx \\ &= xg(x) - \int f(g(x))g'(x) dx \\ &= xg(x) - F(g(x)) + C\end{aligned}$$

שאלה 5

חשבו את האינטגרל $\int \frac{x+3}{x^2+4x+13} dx$.

אינטגרל רימן

שאלה 6

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:
אם f פונקציה אינטגרבילית רימן בקטע $[a, b]$, אז f חסומה ב- $[a, b]$.

שאלה 7

תהי

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \text{ רציונלי} \\ -x & x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$$

הוכיחו באמצעות סכומי רימן או סכומי דרבו כי f אינה אינטגרבילית בקטע $[1, 2]$.

פתרון. בכל קטע בכל חלוקה יש גם מספרים רציונליים וגם מספרים אי-רציונליים, ולכן אין התכנסות כשפרמטר החלוקה שואף לאפס: סכום דרבו עליון שואף ל- $\int_1^2 2x dx$, וסכום דרבו תחתון שואף ל- $\int_1^2 (-x) dx$.

שאלה 8

מהי הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות?

- אם f חסומה ב- $[a, b]$, אז היא אינטגרבילית רימן שם.
- אם $|f|$ אינטגרבילית רימן ב- $[a, b]$, אז f אינטגרבילית רימן ב- $[a, b]$.
- הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית רימן ב- $[0, 1]$.

- אם f מונוטונית ב- $[a, b]$, אז היא אינטגרבילית רימן שם.
- אם f^2 אינטגרבילית רימן ב- $[a, b]$, אז f אינטגרבילית רימן שם.

פתרון.

- לא נכון. נגדיר את פונקציית דיריכלה בקטע $[0, 1]$.
- לא נכון. נגדיר $f(x) = 2D(x) - 1$, כאשר $D(x)$ היא פונקציית דיריכלה.
- לא נכון. הפונקציה אינה חסומה ולכן אינה אינטגרבילית.
- נכון.
- לא נכון. אותה דוגמה כמו בסעיף ב.

לעיון

הגדרה: פונקציה קדומה ואינטגרל לא-מסוים

תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה על קטע I . פונקציה $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת פונקציה קדומה של f בקטע I אם היא גזירה ב- I ומקיימת $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in I$. הביטוי $\int f(x) dx$ מציין את משפחת הפונקציות $F(x) + C$, כאשר C קבוע.

שיטה: הצבה באינטגרל לא-מסוים

תהי f רציפה בקטע I , תהי F פונקציה קדומה שלה, ותהי $g: J \rightarrow I$ גזירה בקטע J . מכלל השרשרת מתקבל

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

שיטה: אינטגרציה בחלקים לא-מסוים

תהיינה u, v גזירות ברציפות בקטע I . נוסחת האינטגרציה בחלקים היא

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

הגדרה: חלוקה וסכומי דרבו

חלוקה של הקטע $[a, b]$ היא קבוצה סופית סדורה של נקודות בקטע:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

תת-הקטע מספר i הוא $[x_{i-1}, x_i]$, ואורכו יסומן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהי P חלוקה של הקטע $[a, b]$. לכל i נסמן

$$m_i = \inf \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad M_i = \sup \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

סכום דרבו העליון עבור f ו- P הוא המספר

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

זהו סכום ה"מלבנים החיצוניים" בשרטוט. סכום דרבו התחתון עבור f ו- P הוא המספר

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

זהו סכום ה"מלבנים הפנימיים" בשרטוט.

הגדרה: אינטגרל דרבו ואינטגרליות רימן

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. אינטגרל דרבו העליון של $f(x)$ בקטע $[a, b]$ מוגדר על ידי

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \{U(f, P) \mid P \text{ חלוקה של הקטע } [a, b]\}$$

אינטגרל דרבו התחתון של $f(x)$ בקטע $[a, b]$ מוגדר על ידי

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{L(f, P) \mid P \text{ חלוקה של הקטע } [a, b]\}$$

נאמר ש- $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a, b]$ אם $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$, ובמקרה זה הערך המשותף יקרא אינטגרל רימן ויסומן $\int_a^b f$.

משפט: תנאים מספיקים לאינטגרביליות

מתקיימות הטענות הבאות:

1. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית. אז $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a, b]$.
2. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. אז $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a, b]$.
3. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. אם $f(x)$ רציפה בכל נקודה בקטע $[a, b]$ פרט, אולי, למספר סופי של נקודות, אז $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a, b]$.