

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

11 תרגול

פונקציות קדומות ואינטגרל רימן

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

פונקציות קדומות

שאלה 1

חשבו את האינטגרל

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

שאלה 2

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx$$

שאלה 3

חשבו את האינטגרל

$$\int \frac{1}{\cos t} \, dt$$

שאלה 4

הפונקציות f, g הפוכות זו לזו וגזירות, וידוע כי

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

הוכיחו כי

$$\int g(x) \, dx = xg(x) - F(g(x)) + C$$

שאלה 5

חשבו את האינטגרל $\int \frac{x+3}{x^2+4x+13} dx$.

אינטגרל רימן

שאלה 6

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:
אם f פונקציה אינטגרבילית רימן בקטע $[a, b]$, אז f חסומה ב- $[a, b]$.

שאלה 7

תהי

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \text{ רציונלי} \\ -x & x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$$

הוכיחו באמצעות סכומי רימן או סכומי דרבו כי f אינה אינטגרבילית בקטע $[1, 2]$.

שאלה 8

מהי הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות?

- אם f חסומה ב- $[a, b]$, אז היא אינטגרבילית רימן שם.
- אם $|f|$ אינטגרבילית רימן ב- $[a, b]$, אז f אינטגרבילית רימן ב- $[a, b]$.
- הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית רימן ב- $[0, 1]$.

- אם f מונוטונית ב- $[a, b]$, אז היא אינטגרבילית רימן שם.
- אם f^2 אינטגרבילית רימן ב- $[a, b]$, אז f אינטגרבילית רימן שם.

לעיון

הגדרה: פונקציה קדומה ואינטגרל לא-מסוים

תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה על קטע I . פונקציה $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת פונקציה קדומה של f בקטע I אם היא גזירה ב- I ומקיימת $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in I$. הביטוי $\int f(x) dx$ מציין את משפחת הפונקציות $F(x) + C$, כאשר C קבוע.

שיטה: הצבה באינטגרל לא-מסוים

תהי f רציפה בקטע I , תהי F פונקציה קדומה שלה, ותהי $g: J \rightarrow I$ גזירה בקטע J . מכלל השרשרת מתקבל

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

שיטה: אינטגרציה בחלקים לאינטגרל לא-מסוים

תהיינה u, v גזירות ברציפות בקטע I . נוסחת האינטגרציה בחלקים היא

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

הגדרה: חלוקה וסכומי דרבו

חלוקה של הקטע $[a, b]$ היא קבוצה סופית סדורה של נקודות בקטע:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

תת-הקטע מספר i הוא $[x_{i-1}, x_i]$, ואורכו יסומן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהי P חלוקה של הקטע $[a, b]$. לכל i נסמן

$$m_i = \inf \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad M_i = \sup \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

סכום דרבו העליון עבור f ו- P הוא המספר

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

זהו סכום ה"מלבנים החיצוניים" בשרטוט. סכום דרבו התחתון עבור f ו- P הוא המספר

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

זהו סכום ה"מלבנים הפנימיים" בשרטוט.

הגדרה: אינטגרל דרבו ואינטגרליות רימן

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. אינטגרל דרבו העליון של $f(x)$ בקטע $[a, b]$ מוגדר על ידי

$$\overline{\int_a^b f} = \inf \{U(f, P) \mid [a, b] \text{ חלוקה של הקטע } [a, b]\}$$

אינטגרל דרבו התחתון של $f(x)$ בקטע $[a, b]$ מוגדר על ידי

$$\underline{\int_a^b f} = \sup \{L(f, P) \mid [a, b] \text{ חלוקה של הקטע } [a, b]\}$$

נאמר ש- $f(x)$ אינטגרלית רימן בקטע $[a, b]$ אם $\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$, ובמקרה זה הערך המשותף יקרא אינטגרל רימן ויסומן $\int_a^b f$.

משפט: תנאים מספיקים לאינטגרליות רימן

מתקיימות הטענות הבאות:

1. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית. אז $f(x)$ אינטגרלית רימן בקטע $[a, b]$.
2. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. אז $f(x)$ אינטגרלית רימן בקטע $[a, b]$.
3. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה. אם $f(x)$ רציפה בכל נקודה בקטע $[a, b]$ פרט, אולי, למספר סופי של נקודות, אז $f(x)$ אינטגרלית רימן בקטע $[a, b]$.