

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

תרגול 10

קמירות, חקירת פונקציות וטיילור

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

חקירת פונקציות

שאלה 1

תנו דוגמה, או הראו שלא קיימת, לפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה ורציפה לכל x , שאינה גזירה בנקודה $x = 3$.

פתרון. הפונקציה

$$f(x) = |x - 3|$$

רציפה ואינה גזירה בנקודה $x = 3$. היא קמורה, שכן לכל $a, b \in \mathbb{R}$ ולכל $0 \leq t \leq 1$ מתקיים

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &= |t(a-3) + (1-t)(b-3)| \\ &\leq t|a-3| + (1-t)|b-3| \\ &= tf(a) + (1-t)f(b) \end{aligned}$$

שאלה 2

מצאו נקודה $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ כך ש-

$$\sin x < \frac{2}{\pi}x$$

או הוכיחו שלא קיימת נקודה כזו.

פתרון. לא קיימת נקודה כזו. הפונקציה $\sin x$ קעורה ב- $[0, \frac{\pi}{2}]$, ולכן הגרף שלה נמצא מעל המיתר המחבר את הנקודות $(0, 0)$ ו- $(\frac{\pi}{2}, 1)$. משוואת המיתר היא

$$y = \frac{2}{\pi}x$$

ולכן $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ בכל הקטע.

שאלה 3

מצאו את מספר האפסים הממשיים של הפולינום

$$p(x) = x^4 + x^2 + 7x - 8$$

פתרון. מספר הנקודות על הישר הממשי שבהן הפולינום מתאפס הוא 2: מתקיים

$$p''(x) = 12x^2 + 2 > 0$$

ולכן יש לכל היותר שני אפסים. מצד שני $p(0) = -8$ ו- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x) = \infty$, ולכן יש שני אפסים.

שאלה 4

שרטטו את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

פתרון. יש לציין שזו אינה שאלה המנוסחת בצורה מתמטית מדויקת, אך הכוונה היא לחקור את הפונקציה (נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון מקומיות וגלובליות אם יש, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול, אסימפטוטות אנכיות ומשופעות), וזה כבר מהווה מושג מדויק.ובכן, ראשית נשים לב שהפונקציה מתאפסת אך ורק בנקודה $x = 0$. לכן המפגש היחיד עם הצירים הוא $x = 0$ (ואז $f(0) = 0$). בנוסף, $x = 0$ היא בבירור נקודת מינימום גלובלית. נגזור ונקבל

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

הפונקציה הזו מתאפסת אך ורק ב-0, ולכן אין אף נקודת קיצון מקומי פרט ל- $x = 0$. בנוסף, ברור כי הנגזרת חיובית מימין ל-0 ושלילית משמאל ל-0. לכן הפונקציה יורדת עד 0 ועולה אחרי 0. נגזור שוב, ונקבל

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{x^3} \cdot \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

עבור $x \neq 0$, פונקציה זו חיובית אם ורק אם

$$0 < \frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}$$

כלומר, אם

$$x^2 < \frac{2}{3}$$

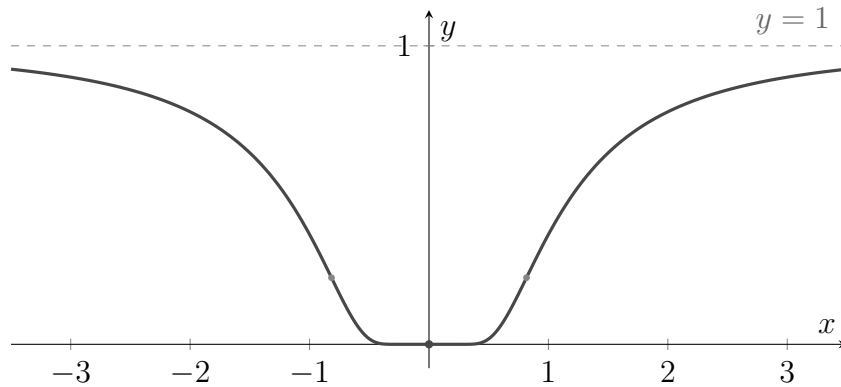
התחום הזה הוא

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

כלומר, הפונקציה קמורה בתחום זה וקעורה מחוץ לתחום זה. לכן שתי הנקודות $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ הן נקודות הפיתול היחידות של הפונקציה. לבסוף, נציין שלפונקציה אין אסימפטוטות אנכיות היות והיא רציפה בכל נקודה, ונותר לבדוק אם יש אסימפטוטות משופעות ב- $\pm\infty$. נבדוק ראשית באינסוף; נזכיר שיש אסימפטוטה משופעת $ax + b$ אם ורק אם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

אצלנו נקבל כמובן $a = 0$ ו- $b = 1$, ולכן $y = 1$ היא אסימפטוטה אופקית באינסוף - וקל לבדוק שגם במינוס אינסוף.



טיילור

שאלה 5

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב 0 של הפונקציה $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ עד סדר 3.

פתרון. הפיתוח הוא

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_3$$

שאלה 6

הוכיחו כי $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ לכל $x > 0$.

פתרון. נשתמש בפולינום טיילור. עבור $x > 0$,

$$f(x) = e^x = T_2(x) + R_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

כאשר קיים $0 < c < x$ שעבורו

$$R_2(x) = \frac{e^c}{3!} x^3$$

אבל $e^c > 0$, ועבור $x > 0$ מתקיים כי $x^3 > 0$. לכן עבור $x > 0$,

$$R_2(x) = \frac{e^c}{3!} x^3 > 0$$

מה שנותן שעבור $x > 0$,

$$f(x) = e^x = T_2(x) + R_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x) > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

שאלה 7

א. נניח כי f גזירה פעמיים ואינה מונוטונית בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש-

$$f'(c) = 0$$

ב. בנוסף נניח כי $|f''(x)| \leq 2$. באמצעות פיתוח פולינום טיילור של הפונקציה מסעיף א סביב הנקודה c , הוכיחו כי

$$|f(x) - f(c)| \leq (x - c)^2$$

פתרון.

א. נניח כי f גזירה פעמיים ואינה מונוטונית בקטע $[a, b]$. אז f' רציפה. מכיוון ש- f אינה מונוטונית, על-פי מסקנות משפט לגראנז' קיימות נקודות $x_0, x_1 \in [a, b]$ כך ש- $f'(x_0) > 0$ ו- $f'(x_1) < 0$. מכיוון ש- f' רציפה, נקבל על-פי משפט ערך הביניים כי קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f'(c) = 0$.
 ב. נפתח את הפונקציה לפולינום טיילור מסדר ראשון סביב הנקודה c עם שארית. קיימת נקודה ξ בין c ל- x כך ש-

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)(x - c)^2}{2} \\ &= f(c) + \frac{f''(\xi)(x - c)^2}{2} \end{aligned}$$

ולכן

$$|f(x) - f(c)| = \left| \frac{f''(\xi)(x - c)^2}{2} \right| = \frac{|f''(\xi)|}{2} |(x - c)^2| \leq (x - c)^2$$

לעיון

הגדרה: פונקציה קמורה ופונקציה קעורה

תהי f פונקציה שמוגדרת בקטע I .

1. נאמר ש- f קמורה ב- I אם לכל $x_1, x_2 \in I$ ולכל $t \in [0, 1]$ מתקיים

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2)$$

2. נאמר ש- f קעורה ב- I אם לכל $x_1, x_2 \in I$ ולכל $t \in [0, 1]$ מתקיים

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \geq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2)$$

בפרט, f קעורה ב- I אם ורק אם $-f$ קמורה ב- I .

משפט: מבחני קמירות

תהי f רציפה בקטע I .

1. אם f גזירה בכל הנקודות הפנימיות של I , אז f קמורה בקטע I אם ורק אם f' עולה בקטע I ללא קצוותיו.

2. אם f גזירה פעמיים בכל הנקודות הפנימיות של I , אז f קמורה בקטע I אם ורק אם $f''(x) \geq 0$ בכל הנקודות הפנימיות של I .

המשפט נכון באותו אופן עבור קעירות, עם יורדת במקום עולה ו- $f''(x) \leq 0$ במקום $f''(x) \geq 0$.

משפט: נגזרת ומונוטוניות

תהי f מוגדרת בקטע $[a, b]$. אז:

1. f קבועה בקטע $[a, b]$ אם ורק אם היא רציפה בקטע $[a, b]$, גזירה בקטע (a, b) ו- $f'(x) \equiv 0$ לכל $x \in (a, b)$.
2. אם f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , אז f עולה בקטע $[a, b]$ אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a, b)$.
3. אם f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , ואם $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$, אז f עולה ממש בקטע $[a, b]$.

סעיפים 2 ו-3 נכונים גם עבור פונקציה יורדת (ממש) ונגזרת אי חיובית (שלילית), עם הוכחות דומות.

משפט: משפט ערך הביניים

תהי f רציפה בקטע $[a, b]$ ונניח שהמספר $\alpha \in \mathbb{R}$ מקיים את התנאי $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$ או $f(b) \leq \alpha \leq f(a)$. אז קיים $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = \alpha$.

משפט: חישוב המקדמים של אסימפטוטה משופעת

תהי f מוגדרת בקרן (A, ∞) . אז $y = ax + b$ היא אסימפטוטה משופעת של f באינסוף אם ורק אם הגבולות הבאים קיימים ושווים למקדמי הישר:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

שיטה: שלבי חקירת פונקציה

חקירת פונקציה היא תהליך של מספר שלבים שבסופו ניתן לשרטט **סקיצה** של גרף הפונקציה, כלומר "בערך לצייר את הגרף". השלבים הם כדלקמן.

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת אסימפטוטות מכל הסוגים.
3. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
4. מציאת תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון מקומי וגלובלי.
5. מציאת תחומי קעירות וקמירות ונקודות פיתול.

הגדרה: פולינום טיילור

תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0 . פולינום טיילור מסדר n של f סביב הנקודה x_0 הוא

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

זהו הפולינום היחיד ממעלה n שמקיים $f^{(k)}(x_0) = t_n^{(k)}(x_0)$ לכל $0 \leq k \leq n$. פולינום טיילור סביב $x_0 = 0$ מכונה פולינום מקלורן.

שיטה: פולינומי מקלורן בסיסיים

עבור $f(x) = \frac{1}{1-x}$ מתקיים

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^n$$

פולינום טיילור של $\ln(1+x)$ מסדר n הוא

$$t_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

פולינום מקלורן של e^x הוא

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

פולינומי טיילור של $\sin x$ הם

$$t_{2m}(x) = t_{2m-1}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

ובאופן דומה, פולינומי טיילור של $\cos x$ הם

$$t_{2m+1}(x) = t_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

משפט: שארית טיילור בצורת לגראנז'

תהי f רציפה בקטע $[x_0, x]$ וגזירה $n+1$ פעמים בקטע $[x_0, x]$. אז קיים $c \in (x_0, x)$ כך שמתקיים

$$r_n(x) = f(x) - t_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

- אין הכרח שהנקודה x תהיה מימין ל- x_0 . כלומר, המשפט תקף גם בקטע מהצורה $[x, x_0]$ (ואז $c \in (x, x_0)$).
- בעצם, אין צורך ש- f תהיה גזירה $n+1$ פעמים בנקודה x_0 עצמה, אלא מספיק ש- $f^{(n)}$ תהיה קיימת ורציפה בה מימין.
- המקרה $n=0$ הוא בדיוק משפט לגראנז':

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

כלומר, זו הכללה של משפט לגראנז'.

- חשוב לשים לב שהנקודה c תלויה ב- f, x_0, x, n .