

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

9 תרגול

משפטי ערך ממוצע וכלל לופיטל

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

משפטי ערך ממוצע

שאלה 1

הוכיחו את משפט פרמה: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, b) , ונניח כי x_0 היא נקודה שבה $f(x)$ מקבלת את ערכה המקסימלי בקטע. אם f גזירה ב- x_0 , אזי

$$f'(x_0) = 0$$

פתרון. ב- x_0 מתקבל המקסימום של הפונקציה, ולכן

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$$

לכל h כך ש- $x_0 + h \in (a, b)$. אבל f גזירה ב- x_0 , ולכן

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

נחשב נגזרות חד-צדדיות:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

וכן

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

אבל $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, ושוויון זה יכול להתקיים רק כאשר

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$$

מכאן $f'(x_0) = 0$ מש"ל.

שאלה 2

כמה נקודות מקסימום מקומי יש לפונקציה

$$f(x) = (x-1)(x-2) \cdots (x-100)?$$

פתרון. הפולינום הנתון הוא פולינום ולכן הוא פונקציה רציפה וגזירה מכל סדר לכל x . הפונקציה מתאפסת ב-100 נקודות שונות.

נובע ממשפט רול שהנגזרת שלה מתאפסת ב-99 נקודות שונות בדיוק, ולא יותר, כי פולינום מדרגה 99 יכול להתאפס לכל היותר ב-99 נקודות. כל אחת מנקודות אלה היא נקודת קיצון של הפונקציה.

הפולינום הנתון חיובי ל- x גדולים וגם ל- x קטנים, ולכן יש לו יותר נקודות מינימום ממקסימום. לכן יש לו 49 נקודות מקסימום ו-50 נקודות מינימום.

שאלה 3

תהי f גזירה ב- $\mathbb{R}$. הראו שאם $f(x_0) = a$ ו- $f'(x) \leq b$ לכל $x \geq x_0$, אז

$$f(x) \leq a + b(x - x_0)$$

לכל x בקטע $[x_0, \infty)$.

פתרון. יהי $x > x_0$. על-פי משפט לגראנז' קיימת נקודה ξ בין x ל- x_0 שעבורה

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \leq b$$

מאחר ש- $x - x_0 > 0$ אפשר לכפול את שני האגפים ב- $x - x_0$ ולשמור על אי-השוויון, כלומר

$$f(x) - a \leq b(x - x_0)$$

ולכן $f(x) \leq a + b(x - x_0)$ לכל $x > x_0$. אי-השוויון מתקיים גם כאשר $x = x_0$.

שאלה 4

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) . הוכיחו כי f מונוטונית עולה בקטע אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל x בקטע.

פתרון. כיוון 1:

נתון כי f גזירה וכי f מונוטונית עולה בקטע (a, b) .

תהי x נקודה כלשהי בקטע.

נחשב נגזרת חד-צדדית של f בנקודה x :

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

מאחר ש- $h > 0$ ו- f מונוטונית עולה, אזי גם המונה וגם המכנה בביטוי האחרון חיוביים, ומכאן נובע כי $f'_+(x) \geq 0$.

הפונקציה f גזירה בנקודה x , ולכן $f'_+(x) = f'(x)$, ולכן $f'(x) \geq 0$ לכל x בקטע (a, b) .

כיוון 2:

נתון כי f גזירה וכי $f'(x) \geq 0$ לכל נקודה בקטע (a, b) .

תהיינה x, y שתי נקודות בקטע (a, b) , ונניח כי $x < y$.

מהנתון נובע כי f רציפה בקטע $[x, y]$ וגזירה בקטע (x, y) , ולכן ממשפט לגרנז' קיימת נקודה c בקטע (x, y) שבה

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$$

הנקודה c שייכת גם לקטע (a, b) שבו נתון כי $f'(x) \geq 0$ לכל x . לכן גם $f'(c) \geq 0$, ולכן

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

המכנה בביטוי האחרון חיובי ממש, ולכן גם המונה חיובי, כלומר f מונוטונית עולה בקטע.

שאלה 5

- א. תהא $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ רציפה. הראו כי קיימת נקודה $0 \leq c \leq 1$ עבורה $f(c) = c$.
 ב. נניח שבנוסף להנחות סעיף א כי f גזירה בקטע $[0, 1]$ וכי $|f'(x)| < 1$ לכל $0 \leq x \leq 1$. הראו כי קיימת נקודה יחידה $0 \leq c \leq 1$ עבורה $f(c) = c$.

פתרון.

- א. נגדיר $g(x) = f(x) - x$. אז $g(x)$ רציפה בקטע $[0, 1]$ כי היא הפרש של פונקציות רציפות. כיוון ש- $0 \leq f(x) \leq 1$ לכל $0 \leq x \leq 1$, אז

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0, \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

אם $g(0) = 0$, אז $f(0) = 0$ וניקח $c = 0$. אם $g(1) = 0$, אז $f(1) = 1$ וניקח $c = 1$. אחרת,

$$g(0) = f(0) - 0 > 0, \quad g(1) = f(1) - 1 < 0$$

לפי משפט ערך הביניים, כיוון ש- $g(x)$ רציפה בקטע $[0, 1]$ וכיוון ש- $g(0) > 0 > g(1)$, קיימת נקודה $0 < c < 1$ עבורה $g(c) = 0$. כלומר $f(c) = c$.

- ב. הראינו קיום בסעיף הקודם. כיוון ש- $|f'(x)| < 1$ לכל $0 \leq x \leq 1$, לכן

$$g'(x) = f'(x) - 1 < 0$$

לכל $0 \leq x \leq 1$. נקבל כי $g(x)$ יורדת ממש בקטע $[0, 1]$, ולכן יש לכל היותר נקודה אחת עבורה $g(c) = 0$. מה שאומר שיש לכל היותר נקודה אחת עבורה $f(c) = c$. כיוון שיש לפחות נקודה אחת כזו, יש בדיוק נקודה אחת.

שאלה 6

תהי f גזירה ב- $[0, \infty)$ כך ש- $f'(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$, $f(0) = 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$. הוכיחו כי

$$f(x) = \arctan x$$

פתרון. נגדיר

$$g(x) = f(x) - \arctan x$$

ברור ש- $g(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, וכן כי $g' \leq 0$. היות ש- g מונוטונית לא עולה, בגלל ש- g מתאפסת ב- 0 וב- ∞ , מתקיים $g \equiv 0$.

כלל לופיטל

שאלה 7

נתונות שתי פונקציות $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, גזירות ומוגדרות בסביבת הנקודה $x = 0$, כך שקיים וסופי הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

הוכיחו או הפריכו: קיים הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

פתרון. הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית היא $f(x) = x$ ו- $g(x) = x^2$. הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

לא קיים, ואילו

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} = 1$$

שאלה 8

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

פתרון. נשתמש בכלל לופיטל פעמיים:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

שאלה 9

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}}$

פתרון. יש לנו כאן גבול מהצורה " 1^∞ ". דרך טובה להשתמש בכלל לופיטל לחישוב גבולות כאלו היא לרשום

$$(1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}} = e^{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}}\right)}$$

ואז לחשב את הגבול של המעריך. אם הוא אכן קיים, היות ו- e^x היא פונקציה רציפה, הרי שהגבול המקורי יהיה שווה ל- e^L , כאשר L הוא הגבול של המעריך. ובכן,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left((1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan(x)} \ln(1+x) \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = 1$$

לכן הגבול המקורי הוא

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}} = e$$

שאלה 10

תהי f גזירה. קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה:
אם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 7$$

אז גם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{2x} = 7$$

פתרון. הטענה לא נכונה. משפט לופיטל מאפשר לחשב גבול של מנה של שתי פונקציות מתוך ידיעת הגבול של מנת הנגזרות, אך לא להפך. לדוגמה, ניקח

$$f(x) = 7x^2 + \sin x^2$$

אז התנאים מתקיימים, אך $f'(x) = 14x + 2x \cos x^2$, ולכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x + 2x \cos x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (7 + \cos x^2)$$

לא קיים.

לעיון

משפט: משפט פרמה

תהי f מוגדרת בסביבה של הנקודה $x = x_0$. אם x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f ובנוסף f גזירה בנקודה x_0 , אז

$$f'(x_0) = 0$$

משפט: משפט רול

תהי f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) . אם $f(a) = f(b)$, אז קיימת $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f'(c) = 0$$

משפט: משפט לגראנז'

תהי f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) . אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

משפט: נגזרת ומונוטוניות

תהי f מוגדרת בקטע $[a, b]$. אז:

1. f קבועה בקטע $[a, b]$ אם ורק אם היא רציפה בקטע $[a, b]$, גזירה בקטע (a, b) ו- $f'(x) \equiv 0$ לכל $x \in (a, b)$.
2. אם f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , אז f עולה בקטע $[a, b]$ אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a, b)$.
3. אם f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , ואם $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$, אז f עולה ממש בקטע $[a, b]$.

סעיפים 2 ו-3 נכונים גם עבור פונקציה יורדת (ממש) ונגזרת אי חיובית (שלילית), עם הוכחות דומות.

משפט: משפט ערך הביניים

תהי f רציפה בקטע $[a, b]$ ונניח שהמספר $\alpha \in \mathbb{R}$ מקיים את התנאי $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$ או $f(b) \leq \alpha \leq f(a)$. אז קיים $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = \alpha$.

משפט: כלל לופיטל

נניח כי f, g גזירות בסביבה מנוקבת ימנית של הנקודה a וכן שמתקיים אחד משני התנאים:

1. $f(x), g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+} 0$ (גבול מהצורה $\frac{0}{0}$).
2. $|g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a+} \infty$ ("גבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$ ").

אם בנוסף $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב, אז גם $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב והם שווים.

- על מנת שהגבול $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g'(x)}$ יהיה קיים במובן הרחב, הפונקציה $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ צריכה להיות מוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה a ובפרט $g'(x) \neq 0$.
- במקרה השני אין צורך שיתקיים גם $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a+} \infty$. נהוג לזכור את המשפט כך אבל זה מיותר.
- נכון גם לגבול משמאל ולכן לגבול רגיל.
- נכון גם עבור $x \rightarrow \infty$ או $x \rightarrow -\infty$.