

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

9 תרגול

משפטי ערך ממוצע וכלל לופיטל

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

משפטי ערך ממוצע

שאלה 1

הוכיחו את משפט פרמה: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, b) , ונניח כי x_0 היא נקודה שבה $f(x)$ מקבלת את ערכה המקסימלי בקטע. אם f גזירה ב- x_0 , אזי

$$f'(x_0) = 0$$

שאלה 2

כמה נקודות מקסימום מקומי יש לפונקציה

$$f(x) = (x-1)(x-2) \cdots (x-100)$$

שאלה 3

תהי f גזירה ב- $\mathbb{R}$. הראו שאם $f(x_0) = a$ ו- $f'(x) \leq b$ לכל $x \geq x_0$, אז

$$f(x) \leq a + b(x - x_0)$$

לכל x בקטע $[x_0, \infty)$.

שאלה 4

תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) . הוכיחו כי f מונוטונית עולה בקטע אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל x בקטע.

שאלה 5

א. תהא $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ רציפה. הראו כי קיימת נקודה $0 \leq c \leq 1$ עבורה $f(c) = c$.
 ב. נניח שבנוסף להנחות סעיף א כי f גזירה בקטע $[0, 1]$ וכי $|f'(x)| < 1$ לכל $0 \leq x \leq 1$. הראו כי קיימת נקודה יחידה $0 \leq c \leq 1$ עבורה $f(c) = c$.

שאלה 6

תהי f גזירה ב- $[0, \infty)$ כך ש- $f'(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$, $f(0) = 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$. הוכיחו כי $f(x) = \arctan x$.

כלל לופיטל

שאלה 7

נתונות שתי פונקציות $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, גזירות ומוגדרות בסביבת הנקודה $x = 0$, כך שקיים וסופי הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

הוכיחו או הפריכו: קיים הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

שאלה 8

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

שאלה 9

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}}$

שאלה 10

תהי f גזירה. קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה:
אם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 7$$

אז גם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{2x} = 7$$

לעיון

משפט: משפט פרמה

תהי f מוגדרת בסביבה של הנקודה x_0 . אם x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f ובנוסף f גזירה בנקודה x_0 , אז

$$f'(x_0) = 0$$

משפט: משפט רול

תהי f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) . אם $f(a) = f(b)$, אז קיימת $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f'(c) = 0$$

משפט: משפט לגראנז'

תהי f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) . אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

משפט: נגזרת ומונוטוניות

תהי f מוגדרת בקטע $[a, b]$. אז:

1. f קבועה בקטע $[a, b]$ אם ורק אם היא רציפה בקטע $[a, b]$, גזירה בקטע (a, b) ו- $f'(x) \equiv 0$ לכל $x \in (a, b)$.

2. אם f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , אז f עולה בקטע $[a, b]$ אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a, b)$.

3. אם f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , ואם $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$, אז f עולה ממש בקטע $[a, b]$.

סעיפים 2 ו-3 נכונים גם עבור פונקציה יורדת (ממש) ונגזרת אי חיובית (שלילית), עם הוכחות דומות.

משפט: משפט ערך הביניים

תהי f רציפה בקטע $[a, b]$ ונניח שהמספר $\alpha \in \mathbb{R}$ מקיים את התנאי $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$ או $f(b) \leq \alpha \leq f(a)$. אז קיים $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = \alpha$.

משפט: כלל לופיטל

נניח כי f, g גזירות בסביבה מנוקבת ימנית של הנקודה a וכן שמתקיים אחד משני התנאים:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{גבול מהצורה } \frac{0}{0}).$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{|g(x)|}{|f(x)|} = \infty \quad (\text{"גבול מהצורה } \frac{\infty}{\infty}).$$

אם בנוסף $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב, אז גם $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב והם שווים.

- על מנת שהגבול $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ יהיה קיים במובן הרחב, הפונקציה $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ צריכה להיות מוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה a ובפרט $g'(x) \neq 0$.
- במקרה השני אין צורך שיתקיים גם $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a+} \infty$. נהוג לזכור את המשפט כך אבל זה מיותר.
- נכון גם לגבול משמאל ולכן לגבול רגיל.
- נכון גם עבור $x \rightarrow \infty$ או $x \rightarrow -\infty$.