

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת'1

תרגול 8

נגזרות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

שאלה 1

תהי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

חשבו את הנגזרת $f'(0)$.**פתרון.** פונקציה זו, שמוגדרת בשתי שורות, מותר לגזור רק על-פי הגדרת הנגזרת:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos h}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$$

מציאת הגבול: תוך שימוש בנוסחה הטריגונומטרית

$$1 - \cos h = 2 \sin^2 \frac{h}{2}$$

שאלה 2

נתון כי $g(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$. נגדיר

$$f(x) = |x|g(x)$$

א. חשבו את הנגזרות החד-צדדיות $f'_+(0)$, $f'_-(0)$.ב. באיזה תנאי על $g(x)$ תהיה הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$?**פתרון.**

א.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|g(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} g(h) = g(0) \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|g(h) - 0}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0^-} g(h) = -g(0) \end{aligned}$$

ב. לפי המשפט, $f(x)$ גזירה בנקודה כלשהי אם ורק אם הנגזרות החד-צדדיות שלה בנקודה זו קיימות ושוות. מספיק שיתקיים $f'_+(0) = f'_-(0)$, כלומר $g(0) = -g(0)$, כלומר $g(0) = 0$.

שאלה 3

נתונה פונקציה f המוגדרת ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 7$$

קבעו אם כל אחת מהטענות הבאות נכונה או לא:

א. אם f רציפה ב- 0 , אז f גזירה ב- 0 .

ב. אם f גזירה ב- 0 , אז $f'(0) = 7$.

ג. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \infty$.

ד. קיימת סביבה נקובה של 0 שבה $f(x) \neq 0$.

פתרון.

א. הטענה נכונה. אם f רציפה ב- 0 , אז

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} x = 0$$

ולכן $f'(0) = 7$.

ב. הטענה נכונה, לפי הגדרת הנגזרת והנתון.

ג. הטענה אינה נכונה. לדוגמה, עבור $f(x) = 7x$ הגבול אינו קיים במובן הרחב.

ד. הטענה נכונה. מן הנתון נובע שקיימת סביבה נקובה של 0 שבה $|f(x)/x - 7| < 1$, ולכן $|f(x)| > 6|x| > 0$.

שאלה 4

חשבו את הנגזרת של $\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$ בנקודה $x = 1$.

פתרון.

$$f'(x) = \frac{1}{3} (x + \sqrt{x})^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

ולכן

$$f'(1) = \frac{1}{3} (1 + 1)^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$$

שאלה 5

אם

$$f(x) = (1 + 2x)^{\cos x}$$

חשבו את $f'(0)$.**פתרון.** הפונקציה f מוגדרת וחיובית בסביבה של אפס. נפעיל $\ln$ ונקבל

$$\ln f(x) = \cos x \ln(1 + 2x)$$

נגזור את שני האגפים:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x \ln(1 + 2x) + \cos x \frac{2}{1 + 2x}$$

מכאן

$$f'(x) = f(x) \left(-\sin x \ln(1 + 2x) + \cos x \frac{2}{1 + 2x} \right)$$

בהצבת $x = 0$ מקבלים $f'(0) = 2$.

שאלה 6

נוזל מוזרם בקצב משתנה לתוך מכל שצורתו חרוט. גובה החרוט ורדיוס בסיסו הם 8 מטרים. קודקוד החרוט מונח על הרצפה ובסיסו מקביל לרצפה. במהלך המילוי גובה פני הנוזל בזמן t שעות נתון על ידי

$$h(t) = 6t^2 - 2t^3$$

לאחר שהמכל מתמלא, הנוזל מוצא ממנו בקצב קבוע של 2 מ"ק בשעה. נפח חרוט שגובהו H ורדיוס בסיסו R הוא

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

- מהו קצב עליית פני הנוזל במהלך המילוי שעה אחת לאחר התחלת המילוי?
- מהו קצב ירידת פני הנוזל בשלב הוצאת הנוזל מהמכל כאשר פני הנוזל נמצאים בגובה 3 מטרים מעל תחתית המכל?

פתרון.

- 6 מטרים בשעה.
- $\frac{2}{9\pi}$ מטרים בשעה.

שאלה 7

נתונה הפונקציה f , המוגדרת, הפיכה וגזירה לכל $x \in \mathbb{R}$, ומקיימת $f(2) = 1$ ו- $f'(2) \neq 0$. נתונה g , הפונקציה ההפוכה לפונקציה f . חשבו את

$$\left. \frac{d}{dx} [g(f^2(x))] \right|_{x=2}$$

כאן $f^2(x) = (f(x))^2$.

פתרון. נשתמש בכלל השרשרת ונגזור את הביטוי הנתון:

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{dx} [g(f^2(x))] \right|_{x=2} &= g'(f^2(x)) 2f(x)f'(x) \Big|_{x=2} \\ &= 2g'(f^2(2)) f(2)f'(2) \\ &= 2g'(1) \cdot 1 \cdot f'(2)\end{aligned}$$

אבל g הפוכה ל- f , כלומר שאם נתון ש- $f(2) = 1$, אזי $g(1) = 2$. שתי הפונקציות גזירות והפיכות, לכן מתקיים, מכיוון ש- $f'(2) \neq 0$,

$$g'(1)f'(2) = 1, \quad g'(1) = \frac{1}{f'(2)}$$

והתוצאה של החשבון היא 2.

שאלה 8

- א. הגדירו את המושג: f גזירה בנקודה x_0 .
 ב. הוכיחו את המשפט הבא: נניח כי f גזירה ב- x_0 , נסמן $y = f(x)$ ו- $y_0 = f(x_0)$, ונניח כי f^{-1} קיימת בסביבה של y_0 וכי $f'(x_0) \neq 0$. אז f^{-1} גזירה ב- y_0 ומתקיים

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- ג. חשבו את הנגזרת של $\arctan x$. נמקו היטב.

פתרון.

- א. הפונקציה f גזירה ב- x_0 אם קיים גבול סופי

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- ב. נסמן $x = f^{-1}(y)$ ונניח ש- $y \rightarrow y_0$ אז $x \rightarrow x_0$, ולכן

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

- ג. אם $y = \arctan x$, אז $x = \tan y$. לכן

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \tan y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

לעיון

הגדרה: נגזרת בנקודה

תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבה של הנקודה $x = x_0$. הנגזרת של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

אם הגבול קיים. נאמר ש- f גזירה בנקודה x_0 אם הנגזרת $f'(x_0)$ קיימת.

הגדרה: נגזרות חד-צדדיות

1. תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה x_0 . הנגזרת הימנית של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי הגבול

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

אם הוא קיים.

2. תהי f מוגדרת בסביבה שמאלית של הנקודה x_0 . הנגזרת השמאלית של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי הגבול

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

אם הוא קיים.

באופן דומה להגדרת הנגזרת, ניתן לכתוב את הנגזרות החד-צדדיות גם באמצעות גבול לפי h :

$$f'_\pm(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

משפט: גזירות באמצעות נגזרות חד-צדדיות

תהי f מוגדרת בסביבה של x_0 . אז f גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם הנגזרות החד-צדדיות של f בנקודה x_0 קיימות ושוות, ובמקרה זה

$$f'(x_0) = f'_\pm(x_0)$$

משפט: גזירות גוררת רציפות

אם f גזירה בנקודה x_0 , אז היא רציפה בנקודה x_0 .

משפט: אריתמטיקה של נגזרות

נניח כי f ו- g גזירות בנקודה x_0 . אז:

1. $f + g$ גזירה בנקודה x_0 ו-

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. fg גזירה בנקודה x_0 ו-

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3. אם בנוסף $g(x_0) \neq 0$, אז $\frac{f}{g}$ גזירה בנקודה x_0 ו-

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

משפט: כלל השרשרת

נניח כי f גזירה בנקודה x_0 ו- g גזירה בנקודה $f(x_0)$. אז ההרכבה $g \circ f$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

משפט: נגזרת הלוגריתם

בתחום $x > 0$ מתקיים

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

משפט: נגזרת של פונקציה הפוכה

נניח כי f רציפה והפיכה בסביבה של $x = x_0$. אם בנוסף f גזירה בנקודה x_0 ומתקיים $f'(x_0) \neq 0$, אז f^{-1} גזירה בנקודה $y_0 = f(x_0)$ ומתקיים

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

נשים לב שכל 3 הנוסחאות שכתובות אומרות בדיוק את אותו דבר, ולסיכומו של עניין הנה הצורה השימושית ביותר:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

משפט: נגזרת של חזקה ממשיית

לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ ו- $x > 0$ נקבל כי

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$