

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

תרגול 8

נגזרות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

שאלה 1

תהי

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

חשבו את הנגזרת $f'(0)$.

שאלה 2

נתון כי $g(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$. נגדיר

$$f(x) = |x|g(x)$$

- א. חשבו את הנגזרות החד-צדדיות $f'_+(0), f'_-(0)$.
- ב. באיזה תנאי על $g(x)$ תהיה הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$?

שאלה 3

נתונה פונקציה f המוגדרת ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 7$$

קבעו אם כל אחת מהטענות הבאות נכונה או לא:

א. אם f רציפה ב- 0 , אז f גזירה ב- 0 .ב. אם f גזירה ב- 0 , אז $f'(0) = 7$.

$$\text{ג. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \infty$$

ד. קיימת סביבה נקובה של 0 שבה $f(x) \neq 0$.

שאלה 4

חשבו את הנגזרת של $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$ בנקודה $x = 1$.

שאלה 5

אם

$$f(x) = (1 + 2x)^{\cos x}$$

חשבו את $f'(0)$.

שאלה 6

נוזל מוזרם בקצב משתנה לתוך מכל שצורתו חרוט. גובה החרוט ורדיוס בסיסו הם 8 מטרים. קודקוד החרוט מונח על הרצפה ובסיסו מקביל לרצפה. במהלך המילוי גובה פני הנוזל בזמן t שעות נתון על ידי

$$h(t) = 6t^2 - 2t^3$$

לאחר שהמכל מתמלא, הנוזל מוצא ממנו בקצב קבוע של 2 מ"ק בשעה. נפח חרוט שגובהו H ורדיוס בסיסו R הוא

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

- מהו קצב עליית פני הנוזל במהלך המילוי שעה אחת לאחר התחלת המילוי?
- מהו קצב ירידת פני הנוזל בשלב הוצאת הנוזל מהמכל כאשר פני הנוזל נמצאים בגובה 3 מטרים מעל תחתית המכל?

שאלה 7

נתונה הפונקציה f , המוגדרת, הפיכה וגזירה לכל $x \in \mathbb{R}$, ומקיימת $f(2) = 1$ ו- $f'(2) \neq 0$. נתונה g , הפונקציה ההפוכה לפונקציה f . חשבו את

$$\left. \frac{d}{dx} [g(f^2(x))] \right|_{x=2}$$

$$\text{כאן } f^2(x) = (f(x))^2$$

שאלה 8

- הגדירו את המושג: f גזירה בנקודה x_0 .
- הוכיחו את המשפט הבא: נניח כי f גזירה ב- x_0 , נסמן $y = f(x)$ ו- $y_0 = f(x_0)$, ונניח כי f^{-1} קיימת בסביבה של y_0 וכי $f'(x_0) \neq 0$. אז f^{-1} גזירה ב- y_0 ומתקיים

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- חשבו את הנגזרת של $\arctan x$. נמקו היטב.

לעיון

הגדרה: נגזרת בנקודה

תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבה של הנקודה $x = x_0$. הנגזרת של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

אם הגבול קיים. נאמר ש- f גזירה בנקודה x_0 אם הנגזרת $f'(x_0)$ קיימת.

הגדרה: נגזרות חד-צדדיות

1. תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה x_0 . הנגזרת הימנית של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי הגבול

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

אם הוא קיים.

2. תהי f מוגדרת בסביבה שמאלית של הנקודה x_0 . הנגזרת השמאלית של f בנקודה x_0 מוגדרת על ידי הגבול

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

אם הוא קיים.

באופן דומה להגדרת הנגזרת, ניתן לכתוב את הנגזרות החד-צדדיות גם באמצעות גבול לפי h :

$$f'_\pm(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0\pm} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

משפט: גזירות באמצעות נגזרות חד-צדדיות

תהי f מוגדרת בסביבה של x_0 . אז גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם הנגזרות החד-צדדיות של f בנקודה x_0 קיימות ושוות, ובמקרה זה

$$f'(x_0) = f'_\pm(x_0)$$

משפט: גזירות גוררת רציפות

אם f גזירה בנקודה x_0 , אז היא רציפה בנקודה x_0 .

משפט: אריתמטיקה של נגזרות

נניח כי f ו- g גזירות בנקודה x_0 . אז:

1. $f + g$ גזירה בנקודה x_0 ו-

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. fg גזירה בנקודה x_0 ו-

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3. אם בנוסף $g(x_0) \neq 0$, אז $\frac{f}{g}$ גזירה בנקודה x_0 ו-

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

משפט: כלל השרשרת

נניח כי f גזירה בנקודה x_0 ו- g גזירה בנקודה $f(x_0)$. אז ההרכבה $g \circ f$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

משפט: נגזרת הלוגריתם

בתחום $x > 0$ מתקיים

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

משפט: נגזרת של פונקציה הפוכה

נניח כי f רציפה והפיכה בסביבה של $x = x_0$. אם בנוסף f גזירה בנקודה x_0 ומתקיים $f'(x_0) \neq 0$, אז f^{-1} גזירה בנקודה $y_0 = f(x_0)$ ומתקיים

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

נשים לב שכל 3 הנוסחאות שכתובות אומרות בדיוק את אותו דבר, ולסיכומו של עניין הנה הצורה השימושית ביותר:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

משפט: נגזרת של חזקה ממשיית

לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ ו- $x > 0$ נקבל כי

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$