

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

7 תרגול

רציפות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

שאלה 1

תנו דוגמה, או הראו שלא קיימת, לפונקציה $f: (1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f(2) = 9$ ו-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(2 - 2^{-n}) = 7$$

פתרון. לדוגמה, נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7x}{2} & 1 < x < 2 \\ 9 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

שאלה 2

יהיו שתי פונקציות $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. נתבונן בטענות הבאות:

1. אם $|f|$ רציפה, אז גם f רציפה.
2. אם f רציפה, אז גם $|f|$ רציפה.
3. אם f רציפה ו- g רציפה, אז גם g רציפה.
4. יהי $x_0 \in (a, b)$. אם ל- f אין גבול כאשר $x \rightarrow x_0$, אז יש סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל- x_0 כך ש- $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת.
5. אם $f + g$ ו- $f - g$ רציפות שתיהן, אז גם f ו- g רציפות.

איזו מהאפשרויות הבאות נכונה?

- א. טענות 1 ו-2 נכונות.
- ב. טענות 2 ו-3 נכונות.
- ג. טענות 1 ו-4 אינן נכונות.
- ד. טענה 2 אינה נכונה ואילו טענה 5 נכונה.
- ה. טענות 4 ו-5 נכונות.

פתרון. נבדוק את הטענות:

1. הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית היא

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הפונקציה f אינה רציפה, ואילו $|f| = 1$ רציפה.2. הטענה נכונה, משום ש- $|f|$ היא הרכבה של פונקציות רציפות.3. הטענה אינה נכונה. אם $f \equiv 0$, אז $fg \equiv 0$ לכל פונקציה g .

4. הטענה נכונה. אילו כל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל- x_0 הייתה נותנת סדרה מתכנסת $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ עם אותו גבול, אז לפי משפט היינה היה קיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, בסתירה לנתון. אם שתי סדרות נותנות גבולות שונים, ערבוב איברייהן לסירוגין נותן סדרה שעבורה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת.

5. הטענה נכונה, משום ש-

$$f = \frac{1}{2} \{ (f+g) + (f-g) \}, \quad g = \frac{1}{2} \{ (f+g) - (f-g) \}$$

לכן אפשרות ה נכונה.

שאלה 3א. הגדירו את המונח "הפונקציה f רציפה בנקודה a ".

ב. עבור הפונקציה

$$f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$$

(במילים, הערך השלם של סינוס x), מצאו את נקודות הרציפות ואת נקודות אי-הרציפות של הפונקציה בקטע $[-3\pi/4, 3\pi/4]$. מיינו את נקודות אי-הרציפות.

פתרון.א. הפונקציה f רציפה בנקודה a אם

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ב. נקודות חשודות לאי-רציפות הן הנקודות שבהן $\sin x$ מקבלת ערך שלם. בקטע הנתון אלההנקודות $0, -\pi/2, \pi/2$.בנקודה $x = -\pi/2$ מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \lfloor \sin x \rfloor = -1 \quad f(-\pi/2) = \lfloor -1 \rfloor = -1$$

ולכן הפונקציה רציפה בנקודה זו.

בנקודה $x = 0$ מתקיים $f(0) = 0$, וכן

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor \sin x \rfloor = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \lfloor \sin x \rfloor = -1$$

לכן זו נקודת אי-רציפות מסוג ראשון.

בנקודה $x = \pi/2$ מתקיים $f(\pi/2) = 1$, ואילו

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \lfloor \sin x \rfloor = 0$$

לכן זו נקודת אי-רציפות סליקה. הפונקציה רציפה בכל שאר נקודות הקטע.

שאלה 4

אם נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) & x \neq 0 \\ C & x = 0 \end{cases}$$

מצאו את ערך הקבוע C שעבורו f רציפה בנקודה $x = 0$.

פתרון.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right)$$

הוא גבול של פונקציה חסומה כפול בפונקציה ששואפת לאפס, ולכן שווה לאפס.

כדי שהפונקציה תהיה רציפה, הגבול שלה כאשר $x \rightarrow 0$ צריך להיות שווה לערך שלה בנקודה, ולכן אם $C = 0$ אז הפונקציה רציפה.

שאלה 5

יהיו f, g שתי פונקציות המוגדרות לכל $x \in \mathbb{R}$. נתון כי $f(x)$ רציפה ו- $f(0) = 0$, ונתון כי

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = A$$

הוכיחו כי הפונקציה $f(x)g(x)$ רציפה ב- $x = 0$.

פתרון. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באפס ולכן קיים לה ערך שם, למשל $g(0) = B$.

אגף שמאל, באמצעות רציפות f ואריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f(0) \cdot A = 0 \cdot A = 0$$

אגף ימין:

$$f(0)g(0) = 0 \cdot g(0) = 0 \cdot B = 0$$

קיבלנו כי $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$, ולכן $f(x)g(x)$ פונקציה רציפה.

שאלה 6

מצאו עבור אילו ערכים של $a, b \in \mathbb{R}$ הפונקציה הבאה מוגדרת ורציפה בכל נקודה $x > -2$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}} & |x| < 2 \\ \frac{ax^2+b}{ax+1} & x \geq 2 \end{cases}$$

פתרון. ראשית נעיר שהביטוי המגדיר את הפונקציה בתחום $|x| < 2$ הוא פונקציה אלמנטרית, ולכן הוא רציף בכל נקודה שבה הוא מוגדר. נוודא אם כך שהוא מוגדר לכל $|x| < 2$; אכן, המונה מוגדר כל עוד $4 - x^2 \geq 0$, אשר מתרחש בדיוק כאשר $|x| \leq 2$. המכנה, לעומתו, מוגדר כאשר

$$(x-3)(x-2) = 6 - 5x + x^2 \geq 0$$

אשר מתרחש כאשר $x \geq 3$ וכן כאשר $x \leq 2$. לבסוף, השבר כולו מוגדר כאשר

$$\sqrt{6-5x+x^2} \neq 0$$

אשר מתרחש כאשר $x > 3$ או $x < 2$. לכן, בתחום $-2 < x < 2$, הביטוי מוגדר. נעבור כעת לביטוי עבור $x \geq 2$. גם זו פונקציה אלמנטרית, ולכן רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת. זה קורה כאשר המכנה אינו מתאפס, כלומר, כאשר $ax + 1 \neq 0$. אם $a = 0$, המכנה אינו מתאפס. אם $a \neq 0$, הביטוי הזה מתאפס בנקודה $x = -\frac{1}{a}$, אשר נמצאת בתחום $x \geq 2$ אם ורק אם $-\frac{1}{2} \leq a < 0$. לכן על מנת ש- f תהיה רציפה, בהכרח $a \notin [-\frac{1}{2}, 0)$. לבסוף, עבור הנקודה היחידה שבסביבתה הפונקציה אינה אלמנטרית, כלומר, עבור $x = 2$, נבדוק רציפות על ידי חישוב גבול מימין וגבול משמאל. על מנת שהפונקציה תהיה רציפה, שני הגבולות הללו חייבים להזדהות ולהיות שווים ל- $f(2)$. כלומר, חייב להתקיים

$$\begin{aligned} \frac{4a+b}{2a+1} = f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2+b}{ax+1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax^2+b}{ax+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 2 \end{aligned}$$

הפתרון הוא $b = 2$ ו- $a \notin [-\frac{1}{2}, 0)$.

שאלה 7

נתון ש- f היא פונקציה רציפה ב- $[2, \infty)$, ש- $f(2) = 1$ וש-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5.$$

הוכיחו שקיים $c > 2$ כך ש- $f(c) = 3$.

פתרון. נתון: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך שאם $x > M$ אז $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

בפרט, עבור $\varepsilon = 2$ קיים $M > 0$ כך שאם $x > M$ אז $3 < f(x) < 7$.

בקטע $[2, M+2]$ הפונקציה f רציפה ו-

$$f(2) = 1 < 3 < f(M+2)$$

לכן על-פי משפט ערך הביניים קיים $2 < c < M+2$ שעבורו $f(c) = 3$.

שאלה 8

א. הראו כי למשוואה

$$x^3 + 4x^2 = \cos x - x$$

יש פתרון בקטע $[-1, 1]$.

ב. הראו כי למשוואה

$$x^3 + 4x^2 = \cos x - x$$

יש לפחות שני פתרונות שונים בקטע $[-1, 1]$.

פתרון. נסמן

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - \cos x$$

הפונקציה f רציפה בכל הישר. מתקיים

$$f(1) = 6 - \cos 1 > 0, \quad f(0) = -1, \quad f(-1) = 2 - \cos(-1) \geq 1 > 0$$

א. מאחר ש- $f(0) < 0 < f(1)$, לפי משפט ערך הביניים קיים $c \in (0, 1)$ כך ש- $f(c) = 0$. לכן c הוא פתרון של המשוואה הנתונה.

ב. מאחר ש- $f(-1) > 0 > f(0)$, לפי משפט ערך הביניים קיים $d \in (-1, 0)$ כך ש- $f(d) = 0$. הפתרונות c ו- d שונים.

שאלה 9

תהי f פונקציה רציפה על כל הישר ומקיימת

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

אז f מקיימת בהכרח:

א. $f(x) \leq 1$.

ב. ל- f יש בהכרח גם מינימום גלובלי וגם מקסימום גלובלי.

ג. ל- f אין בהכרח מקסימום גלובלי ואין בהכרח מינימום גלובלי.

ד. ל- f יש בהכרח מקסימום גלובלי, אבל אין בהכרח מינימום גלובלי.

ה. ל- f יש בהכרח מינימום גלובלי, אבל אין בהכרח מקסימום גלובלי.

פתרון. ל- f אין בהכרח מקסימום גלובלי. למשל, הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{x+1} & x > 0 \end{cases}$$

מקיימת את תנאי השאלה ואין לה מקסימום גלובלי, כי לכל x ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

ל- f יש בהכרח מינימום גלובלי: אם $f(x) \geq 0$ לכל x , אז $f(0) = 0$ הוא מינימום גלובלי של f . אם קיימת נקודה c שבה $f(c) < 0$, נבחר $a < 0$ כך שלכל $x < a$ מתקיים $f(x) > f(c)$, ונבחר $b > 0$ כך שלכל $x > b$ מתקיים $f(x) > f(c)$. מאחר ש-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 > f(c), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 > f(c)$$

ניתן לבחור a, b כאלה. הפונקציה f רציפה ולכן מקבלת מינימום בקטע $[a, b]$, נניח בנקודה d . בהכרח $f(d) \leq f(c) < 0$, ומאחר שלכל $x < a$ או $x > b$ מתקיים $f(x) > f(c) \geq f(d)$, נובע ש- $f(d)$ הוא מינימום של f על כל הישר.

לעיון

הגדרה: גבול של פונקציה באינסוף

תהי f פונקציה שמוגדרת בקרן (a, ∞) .

1. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $|f(x) - L| < \varepsilon$.
2. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) > M$.
3. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < M$.

משפט: תכונות של גבול בנקודה

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ אז $L = K$.
2. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים, אז קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $f(x)$ חסומה.
3. תכונות סדר של גבולות:
 - אם הגבולות קיימים וכן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ אז קיימת סביבה מנוקבת של $x = a$ שבה $f(x) < g(x)$.
 - אם $f(x) \leq g(x)$ בסביבה מנוקבת של $x = a$ והגבולות קיימים אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
4. אריתמטיקה מורחבת של גבולות:
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L + K$ בתנאי שלא כתוב $\infty - \infty$.
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} LK$ בתנאי שלא כתוב $0 \cdot \infty$.
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{L}{K}$ בתנאי שהביטוי $\frac{L}{K}$ מוגדר (בין אם כמנת מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של מנה במובן הרחב בסדרות). למשל, אם $L > 0$ ו- $K = 0$, וקיימת סביבה מנוקבת של a שבה $g(x) > 0$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$.
5. גבול וערך מוחלט:
 - א. אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אז $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ (כולל המקרה $L = \pm\infty$, עם $|L| = \infty$).
 - ב. אם $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
 - ג. אם $L \in \mathbb{R}$ (כלומר, סופי) אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0$.
6. גבול של חזקה:
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $f(x)^{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} L^K$ בתנאי שהביטוי L^K מוגדר (בין אם כחזקה בין מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של חזקות במובן הרחב בסדרות).
7. כלל הסנדוויץ':
 - אם לכל x בסביבה מנוקבת של a מתקיים כי $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$, אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$.
8. חסומה כפול שואפת לאפס:
 - אם f חסומה בסביבה מנוקבת של a ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
9. כלל הפיצה:
 - אם לכל x בסביבה מנוקבת של a מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$, אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$.

משפט: קריטריון היינה בנקודה

1. תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של $x = a$ ויהי $L \in \mathbb{R}$ או $L = \infty$ או $L = -\infty$. אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

2. תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של $x = a$ ויהי $L \in \mathbb{R}$ או $L = \infty$ או $L = -\infty$. אז $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $a < x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ מתקיים $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$.
3. תהי f מוגדרת בסביבה שמאלית של $x = a$ ויהי $L \in \mathbb{R}$ או $L = \infty$ או $L = -\infty$. אז $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $a > x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ מתקיים $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$.

הגדרה: רציפות וסוגי אי־רציפות

תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודה קבועה.

1. תהי f פונקציה אשר מוגדרת בסביבה של הנקודה x_0 . נאמר שהפונקציה רציפה בנקודה x_0 אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 , ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים אבל אינו שווה לערך $f(x_0)$, או ש- f אינה מוגדרת בנקודה x_0 , נאמר ש- x_0 היא נקודת אי־רציפות סליקה.
3. אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 , והגבולות החד־צדדיים $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$ קיימים אבל שונים, נאמר ש- x_0 היא נקודת אי־רציפות מסוג קפיצה.
4. אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 ולפחות אחד מבין הגבולות החד־צדדיים $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$ אינו קיים, נאמר ש- x_0 היא נקודת אי־רציפות עיקרית.
5. תהי f פונקציה אשר מוגדרת בקטע $[x_0, b)$ עבור איזשהו $b > x_0$. נאמר שהפונקציה f רציפה מימין בנקודה x_0 אם $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$.
6. תהי f פונקציה אשר מוגדרת בקטע $(a, x_0]$ עבור איזשהו $a < x_0$. נאמר שהפונקציה f רציפה משמאל בנקודה x_0 אם $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$.

משפט: תכונות בסיסיות של רציפות ושל אי־רציפויות

1. ניסוח הינה לרציפות: f רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ מתקיים $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x_0)$.
2. אריתמטיקה של פונקציות רציפות: אם f ו- g רציפות בנקודה x_0 אז גם $f+g$, fg רציפות בנקודה x_0 . בנוסף, אם $g(x_0) \neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ רציפה בנקודה x_0 .
3. רציפות של הרכבה: אם f רציפה בנקודה x_0 ו- g רציפה בנקודה $f(x_0)$, אז $g \circ f$ (כלומר $g(f(x))$) רציפה בנקודה x_0 .
4. חיוביות: אם f רציפה בנקודה x_0 וכן $f(x_0) > 0$, אז קיימת סביבה של x_0 שבה $f(x) > 0$.
5. אי־רציפויות של פונקציה מונוטונית: אם f מונוטונית בסביבת הנקודה x_0 , אז f רציפה ב- x_0 או שיש לה אי־רציפות מסוג קפיצה בנקודה x_0 . כלומר, לא תיתכן אי־רציפות סליקה וכן לא תיתכן אי־רציפות עיקרית. לכן לפונקציה מונוטונית בקטע פתוח יש אי־רציפויות מסוג קפיצה (אם בכלל) בלבד.
6. רציפה אם ורק אם מימין ומשמאל: רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם היא רציפה מימין וגם רציפה משמאל בנקודה x_0 .

משפט: משפט ערך הביניים

תהי f רציפה בקטע $[a, b]$ ונניח שהמספר $\alpha \in \mathbb{R}$ מקיים את התנאי $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$ או $f(b) \leq \alpha \leq f(a)$. אז קיים $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = \alpha$.

משפט: משפט ויירשטראס על קבלת קיצון

תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$. אז f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע: קיימות $x_1, x_2 \in [a, b]$ כך שלכל $x \in [a, b]$ מתקיים $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.