

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

## 7 תרגול

## רציפות

יוחאי מעין

## הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

## שאלה 1

תנו דוגמה, או הראו שלא קיימת, לפונקציה  $f: (1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש- $f(2) = 9$  ו-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(2 - 2^{-n}) = 7$$

## שאלה 2

היו שתי פונקציות  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ו- $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . נתבונן בטענות הבאות:

1. אם  $|f|$  רציפה, אז גם  $f$  רציפה.
2. אם  $f$  רציפה, אז גם  $|f|$  רציפה.
3. אם  $f$  רציפה ו- $fg$  רציפה, אז גם  $g$  רציפה.
4. יהי  $x_0 \in (a, b)$ . אם ל- $f$  אין גבול כאשר  $x \rightarrow x_0$ , אז יש סדרה  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  המתכנסת ל- $x_0$  כך ש- $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$  אינה מתכנסת.
5. אם  $f + g$  ו- $f - g$  רציפות שניהן, אז גם  $f$  ו- $g$  רציפות.

איזו מהאפשרויות הבאות נכונה?

- א. טענות 1 ו-2 נכונות.
- ב. טענות 2 ו-3 נכונות.
- ג. טענות 1 ו-4 אינן נכונות.
- ד. טענה 2 אינה נכונה ואילו טענה 5 נכונה.
- ה. טענות 4 ו-5 נכונות.

## שאלה 3

א. הגדירו את המונח "הפונקציה  $f$  רציפה בנקודה  $a$ ".

ב. עבור הפונקציה

$$f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$$

(במילים, הערך השלם של סינוס  $x$ ), מצאו את נקודות הרציפות ואת נקודות אי-הרציפות של הפונקציה בקטע  $[-3\pi/4, 3\pi/4]$ . מיינו את נקודות אי-הרציפות.

## שאלה 4

אם נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) & x \neq 0 \\ C & x = 0 \end{cases}$$

מצאו את ערך הקבוע  $C$  שעבורו  $f$  רציפה בנקודה  $x = 0$ .

## שאלה 5

יהיו  $f, g$  שתי פונקציות המוגדרות לכל  $x \in \mathbb{R}$ . נתון כי  $f(x)$  רציפה ו- $f(0) = 0$ , ונתון כי

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = A$$

הוכיחו כי הפונקציה  $f(x)g(x)$  רציפה ב- $x = 0$ .

## שאלה 6

מצאו עבור אילו ערכים של  $a, b \in \mathbb{R}$  הפונקציה הבאה מוגדרת ורציפה בכל נקודה  $x > -2$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}} & |x| < 2 \\ \frac{ax^2+b}{ax+1} & x \geq 2 \end{cases}$$

## שאלה 7

נתון ש- $f$  היא פונקציה רציפה ב- $[2, \infty)$ , ש- $f(2) = 1$  וש-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו שקיים  $c > 2$  כך ש- $f(c) = 3$ .

## שאלה 8

א. הראו כי למשוואה

$$x^3 + 4x^2 = \cos x - x$$

יש פתרון בקטע  $[-1, 1]$ .

ב. הראו כי למשוואה

$$x^3 + 4x^2 = \cos x - x$$

יש לפחות שני פתרונות שונים בקטע  $[-1, 1]$ .

## שאלה 9

תהי  $f$  פונקציה רציפה על כל הישר ומקיימת

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

אז  $f$  מקיימת בהכרח:

$$f(x) \leq 1.$$

ב.  $f^-$  יש בהכרח גם מינימום גלובלי וגם מקסימום גלובלי.ג.  $f^-$  אין בהכרח מקסימום גלובלי ואין בהכרח מינימום גלובלי.ד.  $f^-$  יש בהכרח מקסימום גלובלי, אבל אין בהכרח מינימום גלובלי.ה.  $f^-$  יש בהכרח מינימום גלובלי, אבל אין בהכרח מקסימום גלובלי.

## לעיון

## הגדרה: גבול של פונקציה באינסוף

תהי  $f$  פונקציה שמוגדרת בקרן  $(a, \infty)$ .1. יהי  $L \in \mathbb{R}$ . נאמר שמתקיים  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $N \geq a$  כך שלכל  $x > N$  מתקיים כי  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .2. נאמר שמתקיים  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  אם לכל  $M \in \mathbb{R}$  קיים  $N \geq a$  כך שלכל  $x > N$  מתקיים כי  $f(x) > M$ .3. נאמר שמתקיים  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  אם לכל  $M \in \mathbb{R}$  קיים  $N \geq a$  כך שלכל  $x > N$  מתקיים כי  $f(x) < M$ .

## משפט: תכונות של גבול בנקודה

1. הגבול הוא יחיד: אם  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  וגם  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$  אז  $L = K$ .2. אם הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  קיים, אז קיימת סביבה מנוקבת של  $a$  שבה  $f$  חסומה.

3. תכונות סדר של גבולות:

• אם הגבולות קיימים וכן  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  אז קיימת סביבה מנוקבת של  $x = a$  שבה  $f(x) < g(x)$ .• אם  $f(x) \leq g(x)$  בסביבה מנוקבת של  $x = a$  והגבולות קיימים אז  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

4. אריתמטיקה מורחבת של גבולות:

• אם  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  ו-  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$ , אז  $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L + K$  בתנאי שלא כתוב

- $\infty - \infty$ . אם  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$  אז  $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} LK$  בתנאי שלא כתוב  $0 \cdot \infty$ .
  - אם  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$  אז  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{L}{K}$  בתנאי שהביטוי  $\frac{L}{K}$  מוגדר (בין אם כמנת מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של מנה במובן הרחב בסדרות). למשל, אם  $L > 0$  ו- $K = 0$ , וקיימת סביבה מנוקבת של  $a$  שבה  $g(x) > 0$ , אז  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$ .
5. גבול וערך מוחלט:
- א. אם  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  אז  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$  (כולל המקרה  $L = \pm\infty$ , עם  $|L| = \infty$ ).
- ב. אם  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$  אז  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .
- ג. אם  $L \in \mathbb{R}$  (כלומר, סופי) אז  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  אם ורק אם  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0$ .
6. גבול של חזקה:
- אם  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$  אז  $f(x)^{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} L^K$  בתנאי שהביטוי  $L^K$  מוגדר (בין אם כחזקה בין מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של חזקות במובן הרחב בסדרות).
7. כלל הסנדוויץ':
- אם לכל  $x$  בסביבה מנוקבת של  $a$  מתקיים  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , ובנוסף  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  ו- $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ , אז  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ .
8. חסומה כפול שואפת לאפס:
- אם  $f$  חסומה בסביבה מנוקבת של  $a$  ובנוסף  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ , אז  $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .
9. כלל הפיצה:
- אם לכל  $x$  בסביבה מנוקבת של  $a$  מתקיים  $f(x) \leq g(x)$ , ובנוסף  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$ , אז  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$ .

### משפט: קריטריון היינה בנקודה

1. תהי  $f$  מוגדרת בסביבה מנוקבת של  $x = a$  ויהי  $L \in \mathbb{R}$  או  $L = \infty$  או  $L = -\infty$ . אז  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  אם ורק אם לכל סדרה  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  מתקיים  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ .
2. תהי  $f$  מוגדרת בסביבה ימנית של  $x = a$  ויהי  $L \in \mathbb{R}$  או  $L = \infty$  או  $L = -\infty$ . אז  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$  אם ורק אם לכל סדרה  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  מתקיים  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ .
3. תהי  $f$  מוגדרת בסביבה שמאלית של  $x = a$  ויהי  $L \in \mathbb{R}$  או  $L = \infty$  או  $L = -\infty$ . אז  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$  אם ורק אם לכל סדרה  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  מתקיים  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ .

### הגדרה: רציפות וסוגי אי־רציפות

תהי  $x_0 \in \mathbb{R}$  נקודה קבועה.

1. תהי  $f$  פונקציה אשר מוגדרת בסביבה של הנקודה  $x_0$ . נאמר שהפונקציה רציפה בנקודה  $x_0$  אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
2. אם  $f$  מוגדרת בסביבה מנוקבת של  $x_0$ , ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  קיים אבל אינו שווה לערך  $f(x_0)$ , או ש- $f$  אינה מוגדרת בנקודה  $x_0$ , נאמר ש- $x_0$  היא נקודת אי־רציפות סליקה.
3. אם  $f$  מוגדרת בסביבה מנוקבת של  $x_0$ , והגבולות החד־צדדיים  $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$  קיימים אבל שונים, נאמר ש- $x_0$  היא נקודת אי־רציפות מסוג קפיצה.
4. אם  $f$  מוגדרת בסביבה מנוקבת של  $x_0$  ולפחות אחד מבין הגבולות החד־צדדיים  $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$  אינו קיים, נאמר ש- $x_0$  היא נקודת אי־רציפות עיקרית.
5. תהי  $f$  פונקציה אשר מוגדרת בקטע  $[x_0, b]$  עבור איזשהו  $b > x_0$ . נאמר שהפונקציה  $f$  רציפה מימין בנקודה  $x_0$  אם  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$ .
6. תהי  $f$  פונקציה אשר מוגדרת בקטע  $(a, x_0]$  עבור איזשהו  $a < x_0$ . נאמר שהפונקציה  $f$  רציפה משמאל בנקודה  $x_0$  אם  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$ .

**משפט: תכונות בסיסיות של רציפות ושל אי-רציפויות**

1. ניסוח היינה לרציפות:  
 $f$  רציפה בנקודה  $x_0$  אם ורק אם לכל סדרה  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$  מתקיים כי  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$ .
2. אריתמטיקה של פונקציות רציפות:  
 אם  $f$  ו- $g$  רציפות בנקודה  $x_0$  אז גם  $f+g$ ,  $fg$  רציפות בנקודה  $x_0$ . בנוסף, אם  $g(x_0) \neq 0$  אז גם  $\frac{f}{g}$  רציפה בנקודה  $x_0$ .
3. רציפות של הרכבה:  
 אם  $f$  רציפה בנקודה  $x_0$  ו- $g$  רציפה בנקודה  $f(x_0)$ , אז  $g \circ f$  (כלומר  $g(f(x))$ ) רציפה בנקודה  $x_0$ .
4. חיוביות:  
 אם  $f$  רציפה בנקודה  $x_0$  וכן  $f(x_0) > 0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$  שבה  $f(x) > 0$ .
5. אי-רציפויות של פונקציה מונוטונית:  
 אם  $f$  מונוטונית בסביבת הנקודה  $x_0$ ,  $x = x_0$ , אז  $f$  רציפה ב- $x_0$  או שיש לה אי-רציפות מסוג קפיצה בנקודה  $x_0$ . כלומר, לא תיתכן אי-רציפות סליקה וכן לא תיתכן אי-רציפות עיקרית. לכן לפונקציה מונוטונית בקטע פתוח יש אי-רציפויות מסוג קפיצה (אם בכלל) בלבד.
6. רציפה אם ורק אם מימין ומשמאל:  
 $f$  רציפה בנקודה  $x_0$  אם ורק אם היא רציפה מימין וגם רציפה משמאל בנקודה  $x_0$ .

**משפט: משפט ערך הביניים**

תהי  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$  ונניח שהמספר  $\alpha \in \mathbb{R}$  מקיים את התנאי  $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$  או  $f(b) \leq \alpha \leq f(a)$ . אז קיים  $c \in [a, b]$  כך ש- $f(c) = \alpha$ .

**משפט: משפט ויירשטראס על קבלת קיצון**

תהי  $f(x)$  רציפה בקטע  $[a, b]$ . אז  $f$  מקבלת מינימום ומקסימום בקטע: קיימות  $x_1, x_2 \in [a, b]$  כך שלכל  $x \in [a, b]$  מתקיים

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$