

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

6 תרגול

גבולות של פונקציות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

שאלה 1

הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{5x^2 + 1} - x\sqrt{5})$$

שווה ל- $1/(2\sqrt{5})$.

פתרון.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{5x^2 + 1} - x\sqrt{5}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt{5 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{5} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(5 + \frac{1}{x^2} - 5 \right)}{\sqrt{5 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

שאלה 2

חשבו

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sin x}{x + \cos(3x) + e^{-x}}$$

פתרון. נחלק את המונה ואת המכנה ב- x . מאחר ש- $x \rightarrow \infty$, מתקיים

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1, \quad \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{\cos(3x)}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{e^{-x}}{x} \rightarrow 0$$

לכן הגבול הוא 1.

שאלה 3

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x + x^2)^{\frac{1}{\sin x}}$$

פתרון. נכתוב

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x + x^2)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + 3x + x^2)^{\frac{1}{3x+x^2}} \right)^{\frac{3x+x^2}{\sin x}} = e^3$$

שאלה 4

א. הגדירו במדויק: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ב. הוכיחו כי אם $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2017$, אזי קיימת סביבה נקובה של אפס שבה $f(x) > 2000$.ג. נתון בנוסף שהפונקציה g מקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$. הוכיחו לפי ההגדרה כי

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x) = \infty$$

פתרון.

א. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה נקובה של הנקודה a . ל- f יש גבול בנקודה a וערכו L אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$. נסמן זאת על ידי $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ או $f(x) \rightarrow L$ כאשר $x \rightarrow a$.

ב. נתון כי $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2017$, ולכן מהגדרת הגבול, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x| < \delta$ מתקיים $|f(x) - 2017| < \varepsilon$. בפרט, עבור $\varepsilon = 2017 - 2000 = 17$ קיימת סביבה נקובה של אפס שבה מתקיים

$$2000 = 2017 - 17 = 2017 - \varepsilon < f(x) < 2017 + \varepsilon = 2034$$

ולכן קיימת סביבה נקובה של אפס שבה $f(x) > 2000$.

דגש: ניתן היה לבחור כל ε המקיים $0 < \varepsilon \leq 17$, אך יש להציג מספר קונקרטי.
ג. מהנתון $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ עולה כי לכל $M > 0$ קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $0 < |x| < \delta_1$ מתקיים $g(x) > M$. מהנתון $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2017$ עולה שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל $0 < |x| < \delta_2$ מתקיים

$$2017 - \varepsilon < f(x) < 2017 + \varepsilon$$

נרצה להוכיח שלכל $K > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x| < \delta$ מתקיים $f(x) + g(x) > K$. יהי $K > 0$ כלשהו. נבחר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, שעבורו לכל $0 < |x| < \delta$ מתקיים

$$f(x) + g(x) > 2017 - \varepsilon + M$$

בפרט, עבור $\varepsilon = 17$ מתקיים $0 < \varepsilon = 17$ ובפרט עבור $M = K$ נקבל $f(x) + g(x) > K$, והוכחנו את הגבול לפי ההגדרה.
דגשים:

- הוכחות המתבססות על משפטי האריתמטיקה לא התקבלו (מאחר שנתבקשתם להוכיח לפי ההגדרה).

- מהנתון לא ניתן להסיק כי $\delta_1 = \delta_2$, ועל כן חייבים לקחת $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ על מנת ששני הנתונים יתקיימו בו־זמנית.
- לא ניתן לקבוע מיהו K , מאחר שיש להוכיח את הטענה "לכל $K > 0$ ".

שאלה 5

הוכיחו לפי ההגדרה שאם

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

אז

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

פתרון. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$ כך שלכל x שעבורו $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

ל- x כזה מתקיים $0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$ ולכן

$$\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| < \varepsilon$$

הוכחנו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז

$$\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| < \varepsilon$$

שאלה 6

נתונות שתי פונקציות $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

הוכיחו או הפריכו:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f^2(x)} = 0$$

פתרון. הטענה אינה נכונה. ניקח למשל $f(x) = x$ ו- $g(x) = x^2$. מאריתמטיקה מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

אולם

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \neq 0$$

דגש: על מנת שהטענה תהיה נכונה חייבים להוסיף נתון מסוים על הפונקציה f . למשל, נרצה שהפונקציה $1/f(x)$ תהיה חסומה, ואז נוכל להשתמש באריתמטיקה ובמשפט "חסומה כפול שואפת לאפס" ולקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x)} = 0$$

מאחר שלא נתון לנו שום דבר אודות הפונקציה $1/f(x)$, אז לבחירת הדוגמה הנגדית בחרנו פונקציה f כזאת שההופכי שלה $1/f$ אינו חסום בסביבת אפס.

שאלה 7

הוכיחו לפי ההגדרה שאם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

אז

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$$

כאשר L הוא מספר סופי.

פתרון. יהי $\varepsilon_0 > 0$. עלינו להראות שקיים $\delta_0 > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < x < \delta_0$ מתקיים

$$\left| f\left(\frac{1}{x}\right) - L \right| < \varepsilon_0$$

מאחר שנתון ש- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$, קיים $M_0 > 0$ כך ש- $t > M_0$ גורר

$$|f(t) - L| < \varepsilon_0$$

נבחר $\delta_0 = \frac{1}{M_0}$. אז $0 < x < \delta_0$ גורר $\frac{1}{x} > M_0$, ולכן

$$\left| f\left(\frac{1}{x}\right) - L \right| < \varepsilon_0$$

שאלה 8

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:
אם

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty$$

אז $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ קיים במובן הרחב.

פתרון. לא. דוגמה נגדית: $f(x) = \frac{1}{x}$.

שאלה 9

הוכיחו כי אם $f(x)$ מונוטונית וקיים הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$$

אז גם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

פתרון. דרך 1 (עם משפטים).

$f(x)$ מונוטונית. נניח בלי הגבלת הכלליות כי היא מונוטונית עולה. מתקיים

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1, \quad f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor + 1). \quad (1)$$

מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$$

ולכן גם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(\lfloor x \rfloor) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(\lfloor x \rfloor + 1) = A$$

לכן ממשפט הסנדוויץ' (עבור פונקציות) ומאי-השוויון (1) נובע כי גם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

מש"ל.

דרך 2 (לפי ההגדרה).

נתון כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$$

לכן

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N, \quad A - f(n) < \varepsilon$$

$f(x)$ מונוטונית. נניח כי היא מונוטונית עולה, ולכן

$$0 \leq A - f(n) < \varepsilon$$

מהמונוטוניות נובע גם כי לכל x מתקיים

$$f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x)$$

אם נבחר $B = N + 1$, אז לכל $x > B$ מתקיים $\lfloor x \rfloor > N$, ולכן

$$0 \leq A - f(x) \leq A - f(\lfloor x \rfloor) < \varepsilon$$

קיבלנו

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B = N + 1 \forall x > B, \quad A - f(x) < \varepsilon$$

ולפיכך

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

מש"ל.

דרך 3.

$f(n)$ סדרה מונוטונית. נניח בלי הגבלת הכלליות שהיא מונוטונית עולה. הגבול של סדרה מונוטונית עולה ומתכנסת הוא הסופרמום שלה, לכן A הוא הסופרמום של הסדרה $f(n)$.

מתקיים

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1, \quad f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor + 1). \quad (1)$$

אבל $f(n) \leq A$ לכל n טבעי, ולכן מכאן ומאיהשוויון (1) נקבל כי

$$f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor + 1) \leq A$$

כלומר, הפונקציה $f(x)$ מונוטונית עולה וחסומה ולכן יש לה גבול כאשר $x \rightarrow \infty$. לפי משפט היינה גם הסדרה $f(n)$ מתכנסת לאותו הגבול. לכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

מש"ל.

לעיון

משפט: סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

אם (a_n) סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, אז היא מתכנסת לחסם העליון שלה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

באופן דומה, אם (a_n) סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע, אז היא מתכנסת לחסם התחתון שלה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הגדרה: גבול של פונקציה באינסוף

תהי f פונקציה שמוגדרת בקרן (a, ∞) .

1. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $|f(x) - L| < \varepsilon$.
2. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) > M$.
3. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < M$.

משפט: תכונות של גבול באינסוף

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = K$, אז $L = K$.
2. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים, אז קיים N כך ש- f חסומה בקרן (N, ∞) .
3. תכונות סדר של גבולות:
 - (א) אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$ והגבולות קיימים במובן הרחב, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.
 - (ב) אם שני הגבולות קיימים במובן הרחב וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$, אז קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < g(x)$.
4. אריתמטיקה של גבולות:
 - (א) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L + K$, בתנאי שלא כתוב $-\infty + \infty$ או $\infty + (-\infty)$.
 - (ב) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} LK$, בתנאי שלא כתוב $0 \cdot (\pm\infty)$.
 - (ג) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{L}{K}$, בתנאי שהביטוי $\frac{L}{K}$ מוגדר במובן

- של אריתמטיקה עם אינסוף (למשל, $\frac{1}{0+}$ פירושו ש- g חיובית החל מנקודה מסוימת ובנוסף $\frac{1}{0+}$).
5. אם $0 \leq L < \infty$ או $0 < K < \infty$, אז $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$ אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} LK$, בתנאי שלא כתוב $0^0, 1^\infty$, או $0^{K < 0}$, ובתנאי שבמקרה $L = 0$ מתקיים כי $f(x) > 0$ החל ממקום מסוים.
6. אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |L|$, בנוסף, $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - L| = 0$ או $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.
7. כלל הסנדוויץ': אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ובנוסף מתקיים כי $f(x), h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$.
8. חסומה כפול שואפת לאפס: אם f חסומה בקרן ימנית ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, אז מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = 0$.
9. כלל הפיצה: אם לכל x בקרן ימנית מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$ ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$, אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$.
10. גבול של הרכבה: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ובנוסף $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = L$ (וכנ"ל עם $-\infty$).

משפט: גבול באינסוף של פונקציה מונוטונית

אם f עולה בקרן (a, ∞) , אז הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים במובן הרחב. בנוסף, הוא סופי אם ורק אם f חסומה מלעיל, ובמקרה הזה הוא שווה לחסם העליון של f בקרן. באופן דומה, עבור f יורדת, עם חסימות מלרע וחסם תחתון.

משפט: קריטריון היינה לגבול באינסוף

תהי f מוגדרת בקרן (a, ∞) . אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $x_n > a$ שמקיימת $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$. המשפט נכון עבור $-\infty \leq L \leq \infty$.

משפט: הגבול המגדיר את e בגרסת פונקציות

מתקיים כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

הגדרה: גבול של פונקציה בנקודה

תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$.

1. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר שהגבול של f בנקודה a הוא L , ונסמן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x שמקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$.
2. נאמר ש- f שואפת לאינסוף כאשר $x \rightarrow a$, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x בסביבה המנוקבת שמקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים $f(x) > M$.
3. נאמר ש- f שואפת למינוס אינסוף כאשר $x \rightarrow a$, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x בסביבה המנוקבת שמקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים $f(x) < M$.

משפט: תכונות של גבול בנקודה

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ אז $L = K$.
 2. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים, אז קיימת סביבה מנוקבת של a שבה f חסומה.
 3. תכונות סדר של גבולות:
- אם הגבולות קיימים וכן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ אז קיימת סביבה מנוקבת של $x = a$ שבה $f(x) < g(x)$.

- אם $f(x) \leq g(x)$ בסביבה מנוקבת של $x = a$ והגבולות קיימים אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
- 4. אריתמטיקה מורחבת של גבולות:
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L + K$ בתנאי שלא כתוב $\infty - \infty$.
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} LK$ בתנאי שלא כתוב $0 \cdot \infty$.
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{L}{K}$ בתנאי שהביטוי $\frac{L}{K}$ מוגדר (בין אם כמנת מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של מנה במובן הרחב בסדרות). למשל, אם $L > 0$ ו- $K = 0$, וקיימת סביבה מנוקבת של a שבה $g(x) > 0$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$.
- 5. גבול וערך מוחלט:
 - א. אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אז $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ (כולל המקרה $L = \pm\infty$, עם $|L| = \infty$).
 - ב. אם $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
 - ג. אם $L \in \mathbb{R}$ (כלומר, סופי) אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0$.
- 6. גבול של חזקה:
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $f(x)^{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} L^K$ בתנאי שהביטוי L^K מוגדר (בין אם כחזקה בין מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של חזקות במובן הרחב בסדרות).
- 7. כלל הסנדוויץ':
 - אם לכל x בסביבה מנוקבת של a מתקיים $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$, אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$.
- 8. חסומה כפול שואפת לאפס:
 - אם f חסומה בסביבה מנוקבת של a ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
- 9. כלל הפיצה:
 - אם לכל x בסביבה מנוקבת של a מתקיים $f(x) \leq g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$, אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$.

משפט: הגבול המיוחד של $\frac{\sin x}{x}$

מתקיים כי

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

הגדרה: גבול חד-צדדי

תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת ימנית של הנקודה $x = a$, כלומר בקטע מהצורה (a, b) כאשר $b > a$.

1. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש- f מתכנסת ל- L כאשר x שואף ל- a מימין, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$, אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, a + \delta)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$.
2. נאמר ש- f שואפת לאינסוף כאשר x שואף ל- a מימין, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, a + \delta)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים $f(x) > M$.
3. נאמר ש- f שואפת למינוס אינסוף כאשר x שואף ל- a מימין, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, a + \delta)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים $f(x) < M$.

ההגדרות, הסימונים והתכונות עבור $x \rightarrow a-$ אנלוגיים.

משפט: קיום גבול באמצעות גבולות חד-צדדיים

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. אז הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים במובן הרחב ושווה ל- L אם ורק אם שני הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ קיימים במובן הרחב ושווים ל- L .