

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

תרגול 6

גבולות של פונקציות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

שאלה 1

הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{5x^2 + 1} - x\sqrt{5} \right)$$

שווה ל- $1/(2\sqrt{5})$.

שאלה 2

חשבו

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sin x}{x + \cos(3x) + e^{-x}}$$

שאלה 3

חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x + x^2)^{\frac{1}{\sin x}}$$

שאלה 4

א. הגדירו במדויק: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ב. הוכיחו כי אם $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2017$, אזי קיימת סביבה נקובה של אפס שבה $f(x) > 2000$.ג. נתון בנוסף שהפונקציה g מקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$. הוכיחו לפי ההגדרה כי

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x) = \infty$$

שאלה 5

הוכיחו לפי ההגדרה שאם

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

אז

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

שאלה 6

נתונות שתי פונקציות $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

הוכיחו או הפריכו:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f^2(x)} = 0$$

שאלה 7

הוכיחו לפי ההגדרה שאם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

אז

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$$

כאשר L הוא מספר סופי.

שאלה 8

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:

אם

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty$$

אז $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ קיים במובן הרחב.

שאלה 9

הוכיחו כי אם $f(x)$ מונוטונית וקיים הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$$

אז גם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

לעיון

משפט: סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

אם (a_n) סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, אז היא מתכנסת לחסם העליון שלה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

באופן דומה, אם (a_n) סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע, אז היא מתכנסת לחסם התחתון שלה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הגדרה: גבול של פונקציה באינסוף

תהי f פונקציה שמוגדרת בקרן (a, ∞) .

1. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $|f(x) - L| < \varepsilon$.
2. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) > M$.
3. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < M$.

משפט: תכונות של גבול באינסוף

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = K$ אז $L = K$.
2. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים, אז קיים N כך ש- f חסומה בקרן (N, ∞) .
3. תכונות סדר גבולות:
 - (א) אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$ והגבולות קיימים במובן הרחב, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.
 - (ב) אם שני הגבולות קיימים במובן הרחב וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$, אז קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < g(x)$.
4. אריתמטיקה של גבולות:
 - (א) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$ אז $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L + K$, בתנאי שלא כתוב $-\infty + \infty$ או $\infty + (-\infty)$.
 - (ב) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$ אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} LK$, בתנאי שלא כתוב $0 \cdot (\pm\infty)$.
 - (ג) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$ אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{L}{K}$, בתנאי שהביטוי $\frac{L}{K}$ מוגדר במובן של אריתמטיקה עם אינסוף (למשל, $\frac{1}{0+}$ פירושו ש- g חיובית החל מנקודה מסוימת ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$).
5. אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L \geq 0$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$ אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L^K$, בתנאי שלא כתוב $0^0, 1^\infty$ או $0^{K < 0}$ ובתנאי שבמקרה $L = 0$ מתקיים כי $f(x) > 0$ החל ממקום מסוים.
6. אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |L|$, בנוסף, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - L| = 0$.
7. כלל הסנדוויץ': אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ובנוסף מתקיים כי $f(x), h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$.
8. חסומה כפול שואפת לאפס: אם f חסומה בקרן ימנית ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ אז מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = 0$.

9. כלל הפיצה: אם לכל x בקרן ימנית מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.
10. גבול של הרכבה: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ובנוסף $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = L$ (וכנ"ל עם $-\infty$).

משפט: גבול באינסוף של פונקציה מונוטונית

אם f עולה בקרן (a, ∞) , אז הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים במובן הרחב. בנוסף, הוא סופי אם ורק אם f חסומה מלעיל, ובמקרה הזה הוא שווה לחסם העליון של f בקרן. באופן דומה, עבור f יורדת, עם חסימות מלרע וחסם תחתון.

משפט: קריטריון היינה לגבול באינסוף

תהי f מוגדרת בקרן (a, ∞) . אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $x_n > a$ שמקיימת $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$. המשפט נכון עבור $-\infty \leq L \leq \infty$.

משפט: הגבול המגדיר את e בגרסת פונקציות

מתקיים כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

הגדרה: גבול של פונקציה בנקודה

תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$.

- יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר שהגבול של f בנקודה a הוא L , ונסמן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x שמקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים כי $|f(x) - L| < \epsilon$.
- נאמר ש- f שואפת לאינסוף כאשר $x \rightarrow a$, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x בסביבה המנוקבת שמקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים כי $f(x) > M$.
- נאמר ש- f שואפת למינוס אינסוף כאשר $x \rightarrow a$, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x בסביבה המנוקבת שמקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים כי $f(x) < M$.

משפט: תכונות של גבול בנקודה

- הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ אז $L = K$.
- אם הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים, אז קיימת סביבה מנוקבת של a שבה f חסומה.
- תכונות סדר של גבולות:
 - אם הגבולות קיימים וכן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ אז קיימת סביבה מנוקבת של $x = a$ שבה $f(x) < g(x)$.
 - אם $f(x) \leq g(x)$ בסביבה מנוקבת של $x = a$ והגבולות קיימים אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
- אריתמטיקה מורחבת של גבולות:
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L + K$ ו- $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L - K$.
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} LK$ ו- $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L/K$ בתנאי שלא כתוב $0 \cdot \infty$.
 - אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$, אז $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L/K$ בתנאי שהביטוי L/K מוגדר (בין אם כמנת מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של מנה במובן הרחב בסדרות). למשל, אם $L > 0$ ו- $K = 0$, וקיימת סביבה מנוקבת של a שבה $g(x) > 0$, אז $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$.
- גבול וערך מוחלט:
 - אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אז $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ (כולל המקרה $L = \pm\infty$, עם $|L| = \infty$).

- ב. אם $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- ג. אם $L \in \mathbb{R}$ (כלומר, סופי) אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0$.
6. גבול של חזקה: אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} K$ אז $f(x)^{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} L^K$ בתנאי שהביטוי L^K מוגדר (בין אם כחזקה בין מספרים או במובן הרחב, כפי שתיארנו בגבול של חזקות במובן הרחב בסדרות).
7. כלל הסנדוויץ': אם לכל x בסביבה מנוקבת של a מתקיים $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ו- $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$, אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$.
8. חסומה כפול שואפת לאפס: אם f חסומה בסביבה מנוקבת של a ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
9. כלל הפיצה: אם לכל x בסביבה מנוקבת של a מתקיים $f(x) \leq g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$, אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$.

משפט: הגבול המיוחד של $\frac{\sin x}{x}$

מתקיים כי

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

הגדרה: גבול חד-צדדי

תהי f פונקציה שמוגדרת בסביבה מנוקבת ימנית של הנקודה $x = a$, כלומר בקטע מהצורה (a, b) כאשר $b > a$.

- יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש- f מתכנסת ל- L כאשר x שואף ל- a מימין, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$, אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, b)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$.
- נאמר ש- f שואפת לאינסוף כאשר x שואף ל- a מימין, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, b)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים $f(x) > M$.
- נאמר ש- f שואפת למינוס אינסוף כאשר x שואף ל- a מימין, ונסמן $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$, אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, b)$ שמקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים $f(x) < M$.

ההגדרות, הסימונים והתכונות עבור $x \rightarrow a-$ אנלוגיים.

משפט: קיום גבול באמצעות גבולות חד-צדדיים

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $x = a$. אז הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים במובן הרחב ושווה ל- L אם ורק אם שני הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ קיימים במובן הרחב ושווים ל- L .