

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת'1

תרגול 5

סדרות קושי ופונקציות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

סדרות קושי

שאלה 1

נתון כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

כאשר L סופי. הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כך שלכל שני מספרים טבעיים $n, m > n_0$ מתקיים

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

פתרון. מהגדרת הגבול, לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

בפרט, עבור $\varepsilon/2$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon/2$. לכן אם $n, m > n_0$ אז

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{וגם} \quad |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

לפי אי-שוויון המשולש,

$$|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

פונקציות

שאלה 2

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה:
אם הפונקציה f מונוטונית עולה ב- $[a, b]$, אז היא חסומה ב- $[a, b]$.

פתרון. הטענה נכונה. אם f מונוטונית עולה (במובן החלש או במובן החזק) ב- $[a, b]$, אז היא מקבלת מקסימום בנקודה $x = b$.

שאלה 3

נתונות שתי פונקציות $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, כך ש- $f(x)$ זוגית ו- $g(x)$ אי-זוגית. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $(f \circ g - g \circ f)(x)$ זוגית.

פתרון. הטענה נכונה. נסמן

$$h(x) = f(g(x)) - g(f(x))$$

מכיוון ש- g אי-זוגית ו- f זוגית, מתקיים

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(g(-x)) - g(f(-x)) \\ &= f(-g(x)) - g(f(x)) \\ &= f(g(x)) - g(f(x)) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ולכן הפונקציה $(f \circ g - g \circ f)(x)$ זוגית לפי ההגדרה.

דגשים:

- רבים השתמשו בטענה "חיסור של פונקציות זוגיות הוא גם פונקציה זוגית" – זו בדיוק הטענה שאותה נתבקשתם להוכיח! יש להוכיח רק לפי ההגדרות של פונקציה זוגית או אי-זוגית.
- פונקציית האפס היא גם פונקציה זוגית וגם פונקציה אי-זוגית.

שאלה 4

תנו דוגמה לפונקציה $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ שהנה:

- חד-חד-ערכית אך לא על.
- על אך לא חד-חד-ערכית.
- חד-חד-ערכית ועל.
- מונוטונית עולה ממש.
- מונוטונית עולה, אך לא ממש.
- מונוטונית יורדת ממש.
- הפיכה.

פתרון.

- $f(x) = \frac{x}{2}$.
- $f(x) = \sin(\pi x)$.
- $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $f(x) = x$.

$$ד. f(x) = x^2, f(x) = \frac{x}{2}, f(x) = x$$

$$ה. f(x) = 0$$

$$ו. f(x) = 1 - x$$

ז. פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא הפיכה אם ורק אם היא חד-חד-ערכית ועל, כך שסעיף זה זהה לסעיף ג'.

שאלה 5

חשבו את הגבול כאשר $x \rightarrow \infty$: $3x - \sqrt{9x^2 + 5x}$.

פתרון. נכפול בצמוד:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - \sqrt{9x^2 + 5x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{3x + \sqrt{9x^2 + 5x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{3 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{9x}}\right)} = -\frac{5}{6}$$

שאלה 6

נתון

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x-1}) = 2$$

מהו ערכו של a ?

פתרון. נשתמש בכפל בצמוד, ואז באריתמטיקה:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x-1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2(a+1) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2(a+1) \frac{1}{\sqrt{1+a/x} + \sqrt{1-1/x}} \\ &= a+1 \end{aligned}$$

מהנתון

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x-1}) = a+1 = 2$$

וזה יקרה אם ורק אם $a = 1$.

שאלה 7

הוכיחו: אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אז הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

קיים וסופי.

שאלה 8

נתונות שתי פונקציות $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אשר חסומות בקטע $I \subset \mathbb{R}$ ומקיימות $f(x) > g(x)$. הוכיחו או הפריכו: בהכרח

$$\sup_{x \in I} f(x) > \sup_{x \in I} g(x)$$

פתרון. הטענה אינה נכונה. ניקח למשל $f(x) = -1/(2x)$ ו- $g(x) = -1/x$ בקרן $I = (1, \infty) \subset \mathbb{R}$. ראשית, מתקיים $f(x) > g(x)$, מאחר ש- $-1/(2x) > -1/x$ אם ורק אם $2 > 1$. עבור הפונקציות שבחרנו מתקיים גם

$$\sup_{x \in I} f(x) = \sup_{x \in I} g(x) = 0$$

נוכיח זאת (בבחינה ההוכחה לא נדרשה). נתחיל להוכיח למשל ש- $\sup_{x \in I} g(x) = 0$: צריך להוכיח כי 0 הוא חסם עליון ומינימלי של הפונקציה בקרן.

- מתקיים $-1/x < 0$ לכל $x \in I$, ולכן 0 הוא חסם עליון (שימו לב כי מופיע אי-שוויון חזק).
- יהי $\varepsilon > 0$. צריך להוכיח שקיים $x_0 \in I$ שעבורו מתקיים $0 - \varepsilon < g(x_0)$, או באופן שקול $g(x_0) > -\varepsilon$. ברור כי אם נבחר $x_0 = 1 + 1/\varepsilon \in I$, אז נקבל

$$g(x_0) = -\frac{1}{1 + 1/\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > -\varepsilon$$

מאחר ש- $\varepsilon > 0$.

על מנת להוכיח כי $\sup_{x \in I} f(x) = 0$ נבצע בדיוק את אותם השלבים:

- מתקיים $-1/(2x) < 0$ לכל $x \in I$, ולכן 0 הוא חסם עליון (שימו לב כי מופיע אי-שוויון חזק).
- יהי $\varepsilon > 0$. צריך להוכיח שקיים $x_0 \in I$ שעבורו מתקיים $0 - \varepsilon < f(x_0)$, או באופן שקול $f(x_0) > -\varepsilon$. ברור כי אם נבחר $x_0 = 1 + 1/(2\varepsilon) \in I$, אז נקבל

$$f(x_0) = -\frac{1}{2(1 + 1/(2\varepsilon))} = -\frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} > -\varepsilon$$

מאחר ש- $\varepsilon > 0$.

מוטיבציה: בתרגול הוכחנו את הטענה שלפיה אם f מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, אזי היא מתכנסת לסופרמום שלה. לכן לבחירת הדוגמה הנגדית בחרנו שתי פונקציות המקיימות $f(x) > g(x)$ וגם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$$

שימו לב כי לפי משפט, אם $f(x) > g(x)$ והגבולות של כל אחת מהן קיימים, אז בגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

ושם לא מופיע אי-שוויון חזק. השוויון בגבולות יקרה כאשר הפונקציות מתכנסות לסופרמום שלהן אשר לא מתקבל כערך הפונקציה (כלומר, הסופרמום לא מוכל בקבוצת התמונה של הפונקציה, ולכן מהווה רק סופרמום ולא מקסימום).

לעיון

משפט: תכונות הערך המוחלט

1. **חיוביות בהחלט:** לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|x| \geq 0$, ויש שוויון $|x| = 0$ אם ורק אם $x = 0$.
2. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|x| \geq x$ וכן $|x| \geq -x$.
3. לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|xy| = |x||y|$. בפרט, $|-x| = |x|$.
4. יהי $a > 0$. אז $|x| < a$ אם ורק אם $-a < x < a$. באופן דומה, עבור $a \geq 0$, $|x| \leq a$ אם ורק אם $-a \leq x \leq a$.
5. **אי-שוויון המשולש:** לכל $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$. למעשה, גם $|x - y| \leq |x| + |y|$.
6. **אי-שוויון המשולש ההפוך:** לכל $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \geq ||x| - |y||$. למעשה, גם $|x + y| \geq ||x| - |y||$.

משפט: תכונות הסופרימום והאינפימום

1. תהי $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה חסומה מלעיל. אז ל- A יש מקסימום אם ורק אם $\sup A \in A$, ובמקרה זה $\max A = \sup A$.
2. החסם העליון הוא יחיד, אם הוא קיים.
3. תהי $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל. אז M הוא החסם העליון של A אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:
(א) לכל $a \in A$, מתקיים $a \leq M$.
(ב) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a > M - \varepsilon$.
כנ"ל עבור חסם תחתון.

משפט: תנאי קושי להתכנסות

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שהסדרה מקיימת את תנאי קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n > N$ מתקיים כי $|a_m - a_n| < \varepsilon$. סדרה מקיימת את תנאי קושי אם ורק אם היא מתכנסת.

הגדרה: פונקציה, תחום הגדרה וטווח

תהיינה A, B קבוצות לא ריקות. פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא כלל שמתאים לכל איבר ב- A איבר יחיד ב- B . האיבר מ- B שמתאים לאיבר $a \in A$ יסומן $f(a)$.
תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה. הקבוצה A נקראת תחום ההגדרה של הפונקציה, והקבוצה B נקראת הטווח של הפונקציה.

מוסכמה: אם לא נאמר אחרת:

1. הטווח הוא $\mathbb{R}$.
2. אם הפונקציה מתוארת על ידי כלל, תחום ההגדרה הוא קבוצת ה- x ים הממשיים שבהם הנוסחה מוגדרת.

הגדרה: חד-חד-ערכיות, על ומונוטוניות

- פונקציה נקראת חד-חד-ערכית אם לכל $x_1 \neq x_2$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_1) \neq f(x_2)$.
פונקציה נקראת על אם לכל y בטווח קיים x בתחום ההגדרה כך ש- $f(x) = y$.
1. פונקציה נקראת מונוטונית עולה אם לכל $x_2 > x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2) \geq f(x_1)$.
 2. פונקציה נקראת מונוטונית עולה ממש אם לכל $x_2 > x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2) > f(x_1)$.

3. פונקציה נקראת מונוטונית יורדת אם לכל $x_2 > x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2) \leq f(x_1)$.
4. פונקציה נקראת מונוטונית יורדת ממש אם לכל $x_2 > x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2) < f(x_1)$.
- פונקציה נקראת מונוטונית אם היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת, והיא נקראת מונוטונית ממש אם היא מונוטונית עולה ממש או מונוטונית יורדת ממש.

הגדרה: פונקציות זוגיות, אי-זוגיות ומחזוריות

1. פונקציה נקראת זוגית אם לכל x בתחום ההגדרה מתקיים כי $-x$ גם נמצא בתחום ההגדרה, ובנוסף $f(-x) = f(x)$.
2. פונקציה נקראת אי-זוגית אם לכל x בתחום ההגדרה מתקיים כי $-x$ גם נמצא בתחום ההגדרה, ובנוסף $f(-x) = -f(x)$.
- פונקציה נקראת מחזורית עם מחזור $T > 0$ אם לכל x בתחום ההגדרה מתקיים כי $x + T$ גם נמצא בתחום ההגדרה, ובנוסף $f(x + T) = f(x)$.

הגדרה: הרכבת פונקציות

תהינה $f : A \rightarrow B$ ו- $g : B \rightarrow C$ שתי פונקציות. ההרכבה של g על f , שתסומן $g \circ f$, היא הפונקציה $g \circ f : A \rightarrow C$ שמוגדרת על ידי

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

הגדרה: פונקציה חסומה וקיצון של פונקציה

- תהי f פונקציה ממשית (כלומר, $B = \mathbb{R}$) ותהי $S \subset A$.
1. נאמר ש- f חסומה מלעיל ב- S אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in S$ מתקיים כי $f(a) \leq M$. כל מספר M כזה מכונה חסם מלעיל של f ב- S .
- החסם העליון של f ב- S הוא המספר $\sup_S f = \sup f(S)$.
2. נאמר ש- f חסומה מלרע ב- S אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in S$ מתקיים כי $f(a) \geq M$. כל מספר M כזה מכונה חסם מלרע של f ב- S .
- החסם התחתון של f ב- S הוא המספר $\inf_S f = \inf f(S)$.
3. נאמר ש- f חסומה ב- S אם היא חסומה מלעיל וגם חסומה מלרע ב- S . נאמר ש- f חסומה אם היא חסומה ב- A .
4. נאמר ש- $x \in S$ היא נקודת מקסימום של f ב- S אם לכל $y \in S$ מתקיים כי $f(y) \leq f(x)$. במקרה זה, הערך $f(x)$ מכונה המקסימום של f ב- S ומסומן $\max_S f$.
- קבוצות כל נקודות המקסימום של f ב- S מסומנת $\operatorname{argmax}_S f$.
5. נאמר ש- $x \in S$ היא נקודת מינימום של f ב- S אם לכל $y \in S$ מתקיים כי $f(y) \geq f(x)$. במקרה זה, הערך $f(x)$ מכונה המינימום של f ב- S ומסומן $\min_S f$.
- קבוצות כל נקודות המינימום של f ב- S מסומנת $\operatorname{argmin}_S f$.

הגדרה: גבול של פונקציה באינסוף

- תהי f פונקציה שמוגדרת בקרן (a, ∞) .
1. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $|f(x) - L| < \varepsilon$.
2. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) > M$.
3. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < M$.

משפט: תכונות של גבול באינסוף

1. הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = K$, אז $L = K$.
2. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים, אז קיים N כך ש- f חסומה בקרן (N, ∞) .
3. תכונות סדר של גבולות:
 - (א) אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$ והגבולות קיימים במובן הרחב, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.
 - (ב) אם שני הגבולות קיימים במובן הרחב וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$, אז קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < g(x)$.
4. אריתמטיקה של גבולות:
 - (א) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L + K$, בתנאי שלא כתוב $-\infty + \infty$ או $\infty + (-\infty)$.
 - (ב) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} LK$, בתנאי שלא כתוב $0 \cdot (\pm\infty)$.
 - (ג) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{L}{K}$, בתנאי שהביטוי $\frac{L}{K}$ מוגדר במובן של אריתמטיקה עם אינסוף (למשל, $\frac{1}{0+}$ פירושו ש- g חיובית החל מנקודה מסוימת ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$).
5. אם $L \geq 0$ ו- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $f(x)^{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L^K$, בתנאי שלא כתוב 0^0 , 1^∞ , או $0^{K < 0}$, ובתנאי שבמקרה $L = 0$ מתקיים כי $f(x) > 0$ החל ממקום מסוים.
6. אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |L|$ או $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - L| = 0$, בנוסף, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - L| = 0$.
7. כלל הסנדוויץ': אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ובנוסף מתקיים כי $f(x), h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$, אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$.
8. חסומה כפול שואפת לאפס: אם f חסומה בקרן ימנית ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, אז מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = 0$.
9. כלל הפיצה: אם לכל x בקרן ימנית מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.
10. גבול של הרכבה: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ובנוסף $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = L$ (וכנ"ל עם $-\infty$).

משפט: גבול באינסוף של פונקציה מונוטונית

אם f עולה בקרן (a, ∞) , אז הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים במובן הרחב. בנוסף, הוא סופי אם ורק אם f חסומה מלעיל, ובמקרה הזה הוא שווה לחסם העליון של f בקרן. באופן דומה, עבור f יורדת, עם חסימות מלרע וחסם תחתון.