

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

תרגול 5

סדרות קושי ופונקציות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

סדרות קושי

שאלה 1

נתון כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

כאשר L סופי. הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כך שלכל שני מספרים טבעיים $n, m > n_0$ מתקיים

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

פונקציות

שאלה 2

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה:
אם הפונקציה f מונוטונית עולה ב- $[a, b]$, אז היא חסומה ב- $[a, b]$.

שאלה 3

נתונות שתי פונקציות $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, כך ש- $f(x)$ זוגית ו- $g(x)$ אי-זוגית. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $(f \circ g - g \circ f)(x)$ זוגית.

שאלה 4

תנו דוגמה לפונקציה $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ שהנה:

- חד-חד-ערכית אך לא על.
- על אך לא חד-חד-ערכית.
- חד-חד-ערכית ועל.
- מונוטונית עולה ממש.
- מונוטונית עולה, אך לא ממש.
- מונוטונית יורדת ממש.
- הפיכה.

שאלה 5

חשבו את הגבול כאשר $x \rightarrow \infty$: $3x - \sqrt{9x^2 + 5x}$.

שאלה 6

נתון

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x-1}) = 2$$

מהו ערכו של a ?

שאלה 7

הוכיחו: אם $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אז הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

קיים וסופי.

שאלה 8

נתונות שתי פונקציות $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אשר חסומות בקטע $I \subset \mathbb{R}$ ומקיימות $f(x) > g(x)$. הוכיחו או הפריכו: בהכרח

$$\sup_{x \in I} f(x) > \sup_{x \in I} g(x)$$

לעיון

משפט: תכונות הערך המוחלט

1. **חיוביות בהחלט:** לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|x| \geq 0$, ויש שוויון $|x| = 0$ אם ורק אם $x = 0$.
2. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|x| \geq x$ וכן $|x| \geq -x$.
3. לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|xy| = |x||y|$. בפרט, $|-x| = |x|$.
4. יהי $a > 0$. אז $|x| < a$ אם ורק אם $-a < x < a$. באופן דומה, עבור $a \geq 0$, $|x| \leq a$ אם ורק אם $-a \leq x \leq a$.
5. **אי-שוויון המשולש:** לכל $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$. למעשה, גם $|x - y| \leq |x| + |y|$.
6. **אי-שוויון המשולש ההפוך:** לכל $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \geq ||x| - |y||$. למעשה, גם $|x + y| \geq ||x| - |y||$.

משפט: תכונות הסופרימום והאינפימום

1. תהי $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה חסומה מלעיל. אז ל- A יש מקסימום אם ורק אם $\sup A \in A$, ובמקרה זה $\max A = \sup A$.
2. החסם העליון הוא יחיד, אם הוא קיים.
3. תהי $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל. אז M הוא החסם העליון של A אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:
(א) לכל $a \in A$, מתקיים $a \leq M$.
(ב) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a > M - \varepsilon$.
כנ"ל עבור חסם תחתון.

משפט: תנאי קושי להתכנסות

- תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שהסדרה מקיימת את תנאי קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n > N$ מתקיים כי $|a_m - a_n| < \varepsilon$. סדרה מקיימת את תנאי קושי אם ורק אם היא מתכנסת.

הגדרה: פונקציה, תחום הגדרה וטווח

תהיינה A, B קבוצות לא ריקות. פונקציה $f : A \rightarrow B$ היא כלל שמתאים לכל איבר ב- A איבר יחיד ב- B . האיבר מ- B שמתאים לאיבר $a \in A$ יסומן $f(a)$. תהי $f : A \rightarrow B$ פונקציה. הקבוצה A נקראת תחום ההגדרה של הפונקציה, והקבוצה B נקראת הטווח של הפונקציה.

מוסכמה: אם לא נאמר אחרת:

1. הטווח הוא $\mathbb{R}$.
2. אם הפונקציה מתוארת על ידי כלל, תחום ההגדרה הוא קבוצת ה- x ים הממשיים שבהם הנוסחה מוגדרת.

הגדרה: חד-חד-ערכיות, על ומונוטוניות

פונקציה נקראת חד-חד-ערכית אם לכל $x_1 \neq x_2$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_1) \neq f(x_2)$. פונקציה נקראת על אם לכל y בטווח קיים x בתחום ההגדרה כך ש- $f(x) = y$.

1. פונקציה נקראת מונוטונית עולה אם לכל $x_2 > x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2) \geq f(x_1)$.
 2. פונקציה נקראת מונוטונית עולה ממש אם לכל $x_2 > x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2) > f(x_1)$.
 3. פונקציה נקראת מונוטונית יורדת אם לכל $x_2 > x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2) \leq f(x_1)$.
 4. פונקציה נקראת מונוטונית יורדת ממש אם לכל $x_2 > x_1$ בתחום ההגדרה מתקיים כי $f(x_2) < f(x_1)$.
- פונקציה נקראת מונוטונית אם היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת, והיא נקראת מונוטונית ממש אם היא מונוטונית עולה ממש או מונוטונית יורדת ממש.

הגדרה: פונקציות זוגיות, אי-זוגיות ומחזוריות

- פונקציה נקראת זוגית אם לכל x בתחום ההגדרה מתקיים כי $-x$ גם נמצא בתחום ההגדרה, ובנוסף $f(-x) = f(x)$.
- פונקציה נקראת אי-זוגית אם לכל x בתחום ההגדרה מתקיים כי $-x$ גם נמצא בתחום ההגדרה, ובנוסף $f(-x) = -f(x)$.
- פונקציה נקראת מחזורית עם מחזור $T > 0$ אם לכל x בתחום ההגדרה מתקיים כי $x + T$ גם נמצא בתחום ההגדרה, ובנוסף $f(x + T) = f(x)$.

הגדרה: הרכבת פונקציות

תהיינה $f : A \rightarrow B$ ו- $g : B \rightarrow C$ שתי פונקציות. ההרכבה של g על f , שתסומן $g \circ f$, היא הפונקציה $g \circ f : A \rightarrow C$ שמוגדרת על ידי

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$
הגדרה: פונקציה חסומה וקיצון של פונקציה

- תהי f פונקציה ממשית (כלומר, $B = \mathbb{R}$) ותהי $S \subset A$.
- נאמר ש- f חסומה מלעיל ב- S אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in S$ מתקיים כי $f(a) \leq M$. כל מספר M כזה מכונה חסם מלעיל של f ב- S .
החסם העליון של f ב- S הוא המספר $\sup_S f = \sup f(S)$.
 - נאמר ש- f חסומה מלרע ב- S אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in S$ מתקיים כי $f(a) \geq M$. כל מספר M כזה מכונה חסם מלרע של f ב- S .
החסם התחתון של f ב- S הוא המספר $\inf_S f = \inf f(S)$.
 - נאמר ש- f חסומה ב- S אם היא חסומה מלעיל וגם חסומה מלרע ב- S . נאמר ש- f חסומה אם היא חסומה ב- A .
 - נאמר ש- $x \in S$ היא נקודת מקסימום של f ב- S אם לכל $y \in S$ מתקיים כי $f(y) \leq f(x)$. במקרה זה, הערך $f(x)$ מכונה המקסימום של f ב- S ומסומן $\max_S f$.
קבוצות כל נקודות המקסימום של f ב- S מסומנת $\operatorname{argmax}_S f$.
 - נאמר ש- $x \in S$ היא נקודת מינימום של f ב- S אם לכל $y \in S$ מתקיים כי $f(y) \geq f(x)$. במקרה זה, הערך $f(x)$ מכונה המינימום של f ב- S ומסומן $\min_S f$.
קבוצות כל נקודות המינימום של f ב- S מסומנת $\operatorname{argmin}_S f$.

הגדרה: גבול של פונקציה באינסוף

- תהי f פונקציה שמוגדרת בקרן (a, ∞) .
- יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $|f(x) - L| < \varepsilon$.
 - נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) > M$.
 - נאמר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \geq a$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < M$.

משפט: תכונות של גבול באינסוף

- הגבול הוא יחיד: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = K$, אז $L = K$.
 - אם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים, אז קיים N כך ש- f חסומה בקרן (N, ∞) .
 - תכונות סדר של גבולות:
- (א) אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$ והגבולות קיימים במובן הרחב, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

(ב) אם שני הגבולות קיימים במובן הרחב וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$, אז קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) < g(x)$.

4. אריתמטיקה של גבולות:

(א) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L + K$, בתנאי שלא כתוב $-\infty + \infty$ או $\infty + (-\infty)$.

(ב) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} LK$, בתנאי שלא כתוב $0 \cdot (\pm\infty)$.

(ג) אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$, אז $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{L}{K}$, בתנאי שהביטוי $\frac{L}{K}$ מוגדר במובן

של אריתמטיקה עם אינסוף (למשל, $\frac{1}{0+}$ פירושו g -חיובית החל מנקודה מסוימת ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$).

5. אם $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L \geq 0$ ו- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K < 0$, אז $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} LK$, בתנאי שלא כתוב $1^\infty, 0^0$ או $0^{K < 0}$, ובתנאי שבמקרה $L = 0$ מתקיים כי $f(x) > 0$ החל ממקום מסוים.

6. אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |L|$, בנוסף, $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - L| = 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

7. כלל הסנדוויץ': אם קיים $N \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > N$ מתקיים כי $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ובנוסף מתקיים כי $f(x), h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$, אז $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L$.

8. חסומה כפול שואפת לאפס: אם f חסומה בקרן ימנית ובנוסף $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, אז מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = 0$.

9. כלל הפיצה: אם לכל x בקרן ימנית מתקיים כי $f(x) \leq g(x)$, ובנוסף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

10. גבול של הרכבה: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ובנוסף $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = L$ (וכנ"ל עם $-\infty$).

משפט: גבול באינסוף של פונקציה מונוטונית

אם f עולה בקרן (a, ∞) , אז הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים במובן הרחב. בנוסף, הוא סופי אם ורק אם f חסומה מלעיל, ובמקרה הזה הוא שווה לחסם העליון של f בקרן. באופן דומה, עבור f יורדת, עם חסימות מלרע וחסם תחתון.