

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

תרגול 4

סדרות מונוטוניות ותת-סדרות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

סדרות מונוטוניות

שאלה 1

מצאו סדרה חיובית $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

אך $a_n \not\rightarrow 0$.

פתרון. למשל,

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

שאלה 2

תהינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת, המקיימות

$$a_n \leq b_n \text{ לכל } n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.

פתרון. מכיוון ש- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ יורדת, לכל n מתקיים $b_n \leq b_1$. נתון שלכל n מתקיים $a_n \leq b_n$, ולכן $a_n \leq b_1$. כלומר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה על-ידי b_1 , ולכן מתכנסת לגבול סופי. באותו אופן, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה על-ידי a_1 , ולכן מתכנסת לגבול סופי. מאריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

לכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

שאלה 3

נתונה הסדרה המוגדרת באופן הבא:

$$a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}, \quad a_1 = 3$$

- א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.
 ב. הוכיחו כי הסדרה חסומה מלמעלה על-ידי 4.
 ג. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרון.

א. הוכחה באינדוקציה.

בדיקה:

$$a_2 = \sqrt{6a_1 - 8} = \sqrt{10} \geq 3 = a_1$$

הנחת האינדוקציה: $a_n \geq a_{n-1}$

הוכחה:

$$a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8} \geq \sqrt{6a_{n-1} - 8} = a_n$$

מהמונוטוניות של השורש והנחת האינדוקציה.

- ב. כמקודם מראים באינדוקציה. מניחים שהסדרה חסומה על-ידי 4 ובודקים שהאיבר הראשון אכן מקיים זאת, ולבסוף

$$a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8} \leq \sqrt{6 \cdot 4 - 8} = \sqrt{16} = 4$$

(שוב מהמונוטוניות והנחת האינדוקציה).

- ג. הסדרה עולה וחסומה ולכן מתכנסת. נסמן את הגבול ב- L . אז

$$L = \sqrt{6L - 8}$$

ולכן

$$L^2 = 6L - 8$$

נקבל שהשורשים האפשריים הם 2 ו-4, אבל הסדרה מונוטונית עולה, ומתכונת סדר הגבולות נקבל שהגבול גדול מ-3, ולכן 4.

תת-סדרות

שאלה 4

תהא (a_n) סדרה הנתונה על ידי

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{4}{a_n}$$

קבעו אם הסדרה מתכנסת, וחשבו את $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

פתרון. נבדוק מספר איברים בסדרה:

$$\{1, 4, 1, 4, 1, \dots\}$$

קיימות שתי תת-סדרות:

$$a_{2k} = 4, \quad a_{2k+1} = 1$$

לכן לא קיים לסדרה גבול, ואז

$$\min\{a_n\} = \inf\{a_n\} = 1, \quad \max\{a_n\} = \sup\{a_n\} = 4$$

שאלה 5

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:
אם לסדרה (a_n) יש תת-סדרה מתכנסת, אז הסדרה (a_n) חסומה.

פתרון. לא. דוגמה נגדית:

$$a_n = n(1 + (-1)^n)$$

שאלה 6

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:
אם $a_n \rightarrow a$ ו- $a_{2n+1} \rightarrow a$, אז $a_n \rightarrow a$.

פתרון. הטענה נכונה.

שאלה 7

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה:
לכל סדרה אינסופית יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב.

פתרון. הטענה נכונה. אם הסדרה חסומה, זהו משפט בולצאנו-וירשטראס, ואם אינה חסומה זו הכללה מיידית שלו.

שאלה 8

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה מלעיל, ונסמן $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$. הראו כי אם M אינו אחד מבין איברי הסדרה, אז הוא גבול חלקי שלה.

פתרון. כלומר, יש להוכיח שאם M אינו אחד מה- a_n ימים אז יש תת-סדרה שמתכנסת אליו. אכן, נבחר תחילה אינדקס n_1 כך ש-

$$a_{n_1} > M - 1$$

כעת נסמן $\epsilon_1 = \min\{\frac{1}{2}, M - a_1, \dots, M - a_{n_1}\}$, ונעיר כי $\epsilon_1 > 0$ שכן לעולם לא יתקיים $M - a_n = 0$. מכאן שנוכל למצוא n_2 כך ש-

$$a_{n_2} > M - \epsilon_1$$

בשלב זה חשוב לשים לב ש- $n_2 > n_1$ (לו זה לא היה מתקיים, לא היינו מקבלים תת-סדרה חוקית). אכן, לא יתכן ש- $n_2 \leq n_1$, מפני שמעצם הגדרת ϵ_1 נקבל שלכל $1 \leq k \leq n_1$, $M - \epsilon_1 \geq M - (M - a_k) = a_k$, בעוד שעבור n_2 מתקיים אי-השוויון ההפוך.

נמשיך כך ונסביר כיצד לבחור את n_{k+1} בהנחה שכבר נבחרו $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ אשר מקיימים כולם $a_{n_i} > M - \frac{1}{i}$; נסמן $\epsilon_k = \min \left\{ \frac{1}{k+1}, M - a_1, \dots, M - a_{n_k} \right\}$, ששוב מקיים $\epsilon_k > 0$ מאותה הסיבה, ונמצא n_{k+1} כך שיתקיים $a_{n_{k+1}} > M - \epsilon_k$. מאותה הסיבה כמו קודם, חייב להתקיים $n_{k+1} > n_k$, וכן מובן ש- $a_{n_{k+1}} > M - \frac{1}{k+1}$. לכן בסך הכל בנינו תת-סדרה המקיימת

$$M - \frac{1}{k} < a_{n_k} < M$$

ועל פי כלל הסנדוויץ' הרי ש-

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = M$$

הערה: נשים לב שהסדרה שבנינו היא מונוטונית עולה (ממש).

לעיון

משפט: עיקרון האינדוקציה

נניח שנתונה סדרה של טענות (כלומר, טענה מס' 1, טענה מס' 2, טענה מס' 3 וכן הלאה) כך שטענה מספר 1 נכונה, וכן מתוך נכונות טענה n נובעת נכונות טענה $n+1$. אז כל הטענות שבסדרה הן טענות נכונות.

הגדרה: סופרימום ואינפימום

תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. נאמר כי M הוא חסם עליון (supremum) של A ונסמן $M = \sup A$ אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. M חסם מלעיל של A .

2. לכל חסם מלעיל M' של A מתקיים $M' \geq M$.

באופן דומה, החסם התחתון $m = \inf A$ של A (infimum), אם קיים, הוא חסם מלרע m של A כך שלכל חסם מלרע m' של A מתקיים $m' \leq m$.

משפט: תכונות הסופרימום והאינפימום

1. תהי $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה חסומה מלעיל. אז ל- A יש מקסימום אם ורק אם $\sup A \in A$, ובמקרה זה $\max A = \sup A$.

2. החסם העליון הוא יחיד, אם הוא קיים.

3. תהי $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל. אז M הוא החסם העליון של A אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

(א) לכל $a \in A$ מתקיים $a \leq M$

(ב) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a > M - \varepsilon$.

כנ"ל עבור חסם תחתון.

משפט: אריתמטיקה של גבולות של סדרות

אריתמטיקה של גבולות: אם $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ ו- $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, אז

$$1. a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$$

$$2. a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$$

$$3. \text{ אם } b \neq 0, \text{ אז } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$$

לפי סעיף קודם, אם $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \neq 0$, אז החל ממקום מסוים $b_n \neq 0$. לכן סדרת המנות $\frac{a_n}{b_n}$ מוגדרת

היטב החל ממקום מסוים, ולכך הכוונה. נעיר שבמילא מספר סופי של איברים בתחילת הסדרה לא היו משפיעים על גבול (אפשר להתעלם מהם).
בכל המקרים, המסקנה היא בין היתר שהסדרה $a_n + b_n$ (או $a_n b_n$, וכו') מתכנסת.

משפט: משפט הסנדוויץ' לסדרות

אם $a_n \leq b_n \leq c_n$ לכל n (החל ממקום מסוים) ו- $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$ וגם $c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$ (אותו גבול L), אז $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$.

הגדרה: סדרה מונוטונית

תהי (a_n) סדרה.

1. נאמר שהסדרה מונוטונית עולה אם לכל n מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$.
2. נאמר שהסדרה מונוטונית יורדת אם לכל n מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.
3. נאמר שהסדרה מונוטונית עולה ממש אם לכל n מתקיים $a_{n+1} > a_n$.
4. נאמר שהסדרה מונוטונית יורדת ממש אם לכל n מתקיים $a_{n+1} < a_n$.

משפט: סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

אם (a_n) סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, אז היא מתכנסת לחסם העליון שלה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

באופן דומה, אם (a_n) סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע, אז היא מתכנסת לחסם התחתון שלה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הגדרה: תת-סדרה

תהי (a_n) סדרה. תת-סדרה שלה היא סדרה שצורתה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, כאשר $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.

משפט: גבול של תת-סדרה של סדרה מתכנסת

תהי (a_n) סדרה שמתכנסת במובן הרחב. אז כל תת-סדרה שלה מתכנסת במובן הרחב ולאותו גבול.

הגדרה: גבול חלקי

תהי (a_n) סדרה.

1. נאמר ש- $L \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של (a_n) אם קיימת תת-סדרה (a_{n_k}) שמתכנסת ל- L , $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$.
2. נאמר ש- $L \in \mathbb{R}$, או $L = \infty$, או $L = -\infty$, הוא גבול חלקי של (a_n) במובן הרחב אם קיימת תת-סדרה (a_{n_k}) שמתכנסת ל- L במובן הרחב, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$.

משפט: תת-סדרה אינסופית של סדרה לא חסומה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

1. אם (a_n) אינה חסומה מלעיל, אז יש לה תת-סדרה ששואפת לאינסוף.
2. אם (a_n) אינה חסומה מלרע, אז יש לה תת-סדרה ששואפת ל- $-\infty$.

משפט: משפט בולצאנו-וירשטראס לסדרות

לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

משפט: מסקנות ממשפט בולצאנו-ויירשטראס

1. לכל סדרה חסומה יש גבול חלקי.
 2. לכל סדרה יש תת-סדרה שמתכנסת במובן הרחב.
 3. לכל סדרה יש גבול חלקי במובן הרחב.
- תהי (a_n) סדרה חסומה. אז (a_n) מתכנסת אם ורק אם יש לה גבול חלקי יחיד. באופן דומה, עבור סדרה כלשהי, היא מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם יש לה גבול חלקי יחיד במובן הרחב.