

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

תרגול 4

סדרות מונוטוניות ותת-סדרות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

סדרות מונוטוניות

שאלה 1

מצאו סדרה חיובית $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

אך $a_n \not\rightarrow 0$.

שאלה 2

תהינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת, המקיימות

$$a_n \leq b_n \text{ לכל } n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.

שאלה 3

נתונה הסדרה המוגדרת באופן הבא:

$$a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}, \quad a_1 = 3$$

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

ב. הוכיחו כי הסדרה חסומה מלמעלה על-ידי 4.

ג. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

תת-סדרות

שאלה 4

תהא (a_n) סדרה הנתונה על ידי

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{4}{a_n}$$

קבעו אם הסדרה מתכנסת, וחשבו את $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

שאלה 5

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:

אם לסדרה (a_n) יש תת-סדרה מתכנסת, אז הסדרה (a_n) חסומה.

שאלה 6

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:

אם $a_{2n} \rightarrow a$ ו- $a_{2n+1} \rightarrow a$, אז $a_n \rightarrow a$.

שאלה 7

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה:

לכל סדרה אינסופית יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב.

שאלה 8

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה מלעיל, ונסמן $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$. הראו כי אם M אינו אחד מבין איברי הסדרה, אז הוא גבול חלקי שלה.

הערה: נשים לב שהסדרה שבנינו היא מונוטונית עולה (ממש).

לעיון

משפט: עיקרון האינדוקציה

נניח שנתונה סדרה של טענות (כלומר, טענה מס' 1, טענה מס' 2, טענה מס' 3 וכן הלאה) כך שטענה מספר 1 נכונה, וכן מתוך נכונות טענה n נובעת נכונות טענה $n+1$. אז כל הטענות שבסדרה הן טענות נכונות.

הגדרה: סופרימום ואינפימום

תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. נאמר כי M הוא חסם עליון (supremum) של A ונסמן $M = \sup A$ אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. M חסם מלעיל של A .

2. לכל חסם מלעיל M' של A מתקיים $M' \geq M$.

באופן דומה, החסם התחתון $m = \inf A$ של A (infimum), אם קיים, הוא חסם מלרע m של A כך שלכל חסם מלרע m' של A מתקיים $m' \leq m$.

משפט: תכונות הסופרימום והאינפימום

1. תהי $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה חסומה מלעיל. אז ל- A יש מקסימום אם ורק אם $\sup A \in A$, ובמקרה זה $\max A = \sup A$.
2. החסם העליון הוא יחיד, אם הוא קיים.
3. תהי $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל. אז M הוא החסם העליון של A אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:
 (א) לכל $a \in A$, מתקיים $a \leq M$.
 (ב) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a > M - \varepsilon$.
 כנ"ל עבור חסם תחתון.

משפט: אריתמטיקה של גבולות של סדרות

אריתמטיקה של גבולות: אם $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ ו- $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, אז

$$1. a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$$

$$2. a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$$

$$3. \text{ אם } b \neq 0, \text{ אז } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$$

לפי סעיף קודם, אם $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \neq 0$, אז החל ממקום מסוים $b_n \neq 0$. לכן סדרת המנות $\frac{a_n}{b_n}$ מוגדרת היטב החל ממקום מסוים, ולכך הכוונה. נעיר שבמילא מספר סופי של איברים בתחילת הסדרה לא היו משפיעים על גבול (אפשר להתעלם מהם).
 בכל המקרים, המסקנה היא בין היתר שהסדרה $a_n + b_n$ (או $a_n b_n$, וכו') מתכנסת.

משפט: משפט הסנדוויץ' לסדרות

אם $a_n \leq b_n \leq c_n$ לכל n (החל ממקום מסוים) ו- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ וגם $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ (אותו גבול L), אז $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

הגדרה: סדרה מונוטונית

תהי (a_n) סדרה.

1. נאמר שהסדרה מונוטונית עולה אם לכל n מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$.
2. נאמר שהסדרה מונוטונית יורדת אם לכל n מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.
3. נאמר שהסדרה מונוטונית עולה ממש אם לכל n מתקיים $a_{n+1} > a_n$.
4. נאמר שהסדרה מונוטונית יורדת ממש אם לכל n מתקיים $a_{n+1} < a_n$.

משפט: סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

אם (a_n) סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, אז היא מתכנסת לחסם העליון שלה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

באופן דומה, אם (a_n) סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע, אז היא מתכנסת לחסם התחתון שלה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הגדרה: תת-סדרה

תהי (a_n) סדרה. תת-סדרה שלה היא סדרה שצורתה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, כאשר $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.

משפט: גבול של תת-סדרה של סדרה מתכנסת

תהי (a_n) סדרה שמתכנסת במובן הרחב. אז כל תת-סדרה שלה מתכנסת במובן הרחב ולאותו גבול.

הגדרה: גבול חלקי

תהי (a_n) סדרה.

1. נאמר ש- $L \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של (a_n) אם קיימת תת-סדרה (a_{n_k}) שמתכנסת ל- L , $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$.

2. נאמר ש- $L \in \mathbb{R}$, או $L = \infty$, או $L = -\infty$, הוא גבול חלקי של (a_n) במובן הרחב אם קיימת תת-סדרה (a_{n_k}) שמתכנסת ל- L במובן הרחב, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$.

משפט: תת-סדרה אינסופית של סדרה לא חסומה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

1. אם (a_n) אינה חסומה מלעיל, אז יש לה תת-סדרה ששואפת לאינסוף.

2. אם (a_n) אינה חסומה מלרע, אז יש לה תת-סדרה ששואפת ל- $-\infty$.

משפט: משפט בולצאנו-וירשטראס לסדרות

לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

משפט: מסקנות ממשפט בולצאנו-וירשטראס

1. לכל סדרה חסומה יש גבול חלקי.

2. לכל סדרה יש תת-סדרה שמתכנסת במובן הרחב.

3. לכל סדרה יש גבול חלקי במובן הרחב.

תהי (a_n) סדרה חסומה. אז (a_n) מתכנסת אם ורק אם יש לה גבול חלקי יחיד. באופן דומה, עבור סדרה כלשהי, היא מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם יש לה גבול חלקי יחיד במובן הרחב.