

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1

3 תרגול

גבולות של סדרות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

שאלה 1

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:
תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית המתכנסת ל- a , כאשר a הוא מספר ממשי כלשהו. אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

פתרון.

Let $a_{2n} = 1/n$ and $a_{2n+1} = 1/(2n+1)^2$. Then (a_n) tends to 0 but a_{n+1}/a_n does not converge at all.

שאלה 2

בכל אחת מהטענות קבעו אם הטענה נכונה או בלתי נכונה. אם הטענה נכונה, תנו דוגמה המקיימת אותה. אם הטענה אינה נכונה, תנו דוגמה נגדית.

- אם $a_n \rightarrow \infty$ ו- (b_n) היא סדרה חיובית, אז $(a_n b_n) \rightarrow \infty$.
- אם $(a_n b_n) \rightarrow 0$, אזי $a_n \rightarrow 0$ או $b_n \rightarrow 0$.
- אם קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$, אז קיימים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ וגם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- אם $a_n \rightarrow L$ ולסדרה (b_n) אין גבול, אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$ לא קיים.

פתרון. כל הטענות אינן נכונות.

א. דוגמה נגדית: $a_n = n$ ו- $b_n = 1/n^2$.

ב. דוגמה נגדית:

$$a_{2n} = 1, \quad a_{2n+1} = 0, \quad b_{2n} = 0, \quad b_{2n+1} = 1$$

ג. דוגמה נגדית: $a_n = (-1)^n$ ו- $b_n = (-1)^{n+1}$.ד. דוגמה נגדית: $a_n = 1/n$ ו- $b_n = (-1)^n$.

שאלה 3

תנו דוגמה לסדרה (a_n) המקיימת $0 < a_n < 10$ לכל n טבעי וכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

או הסבירו מדוע לא קיימת דוגמה כזו.

פתרון. אין. כי אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$$

אז $|a_n| \rightarrow \infty$ והסדרה אינה חסומה.

שאלה 4

הוכיחו באמצעות ההגדרות בלבד את כלל הסנדוויץ':
תהינה $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty$ ו- $(c_n)_{n=1}^\infty$ שלוש סדרות. אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

ואם מתקיים $a_n \leq b_n \leq c_n$ לכל n טבעי, אזי גם הסדרה $(b_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת לגבול L .

פתרון. יהי $\varepsilon > 0$.

נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, לכן קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad (1)$$

נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, לכן קיים n_2 כך שלכל $n \geq n_2$ מתקיים

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \quad (2)$$

יהי $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, אזי לכל $n \geq n_0$ מתקיימים גם (1) וגם (2).

נתון כי $a_n \leq b_n \leq c_n$ לכל n טבעי.

מכאן ומצד שמאל של (1) ומצד ימין של (2) נובע כי לכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

כלומר לכל $n \geq n_0$ מתקיים $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$, ומכאן שהסדרה $(b_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת לגבול L .

שאלה 5

חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right)$$

פתרון. נתבונן באי-השוויון

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \frac{2n+1}{\sqrt{n^2}}$$

שתי הסדרות משני צדי אי-השוויון שואפות ל-2 כאשר $n \rightarrow \infty$.

מכלל הסנדוויץ' נובע שגם הסדרה שבאמצע שואפת לאותו גבול.

ולכן הגבול הוא 2.

שאלה 6

בכל אחת מהטענות קבעו אם הטענה נכונה או בלתי נכונה. אם הטענה נכונה, תנו דוגמה המקיימת אותה. אם הטענה אינה נכונה, תנו דוגמה נגדית.

- אם $a_n \rightarrow 100$, אזי קיים מספר טבעי N כך ש- $a_n > 100$ לכל $n > N$.
- אם $a_n \rightarrow 100$, אזי קיים מספר טבעי N כך ש- $a_n > 99$ לכל $n > N$.
- אם $a_n \rightarrow 0$ ולכל n מתקיים $a_n \neq 0$, אזי $1/a_n \rightarrow \infty$ או $1/a_n \rightarrow -\infty$.
- אם $a_n \rightarrow \infty$, אז $1/a_n \rightarrow 0$.

פתרון.

- הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = 100 - 1/n$.
- הטענה נכונה. דוגמה: $a_n = 100 - 1/(2n)$.
- הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = (-1)^n/n$.
- הטענה נכונה. דוגמה: $a_n = n$.

שאלה 7

הוכיחו על-פי ההגדרה בלבד: אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{ו} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$$

פתרון. יהי $A > 0$ מספר ממשי כלשהו.נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, כלומר קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים

$$a_n > \sqrt{A}$$

נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, כלומר קיים n_2 כך שלכל $n \geq n_2$ מתקיים

$$-b_n > \sqrt{A}, \quad \text{או} \quad b_n < -\sqrt{A},$$

לכן קיים $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$-a_n b_n = a_n(-b_n) > A, \quad \text{או} \quad a_n b_n < -A$$

מכאן נובע ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$.

לעיון

הגדרה: גבול של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L , ונסמן זאת על ידי $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (או $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$), אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים ש- $|a_n - L| < \varepsilon$. סדרה לא מתכנסת מכונה סדרה מתבדרת.

משפט: אריתמטיקה של גבולות של סדרות

אריתמטיקה של גבולות: אם $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ ו- $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, אז

$$1. \quad a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$$

$$2. \quad a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$$

$$3. \quad \text{אם } b \neq 0, \text{ אז } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$$

לפי סעיף קודם, אם $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \neq 0$, אז החל ממקום מסוים $b_n \neq 0$. לכן סדרת המנות $\frac{a_n}{b_n}$ מוגדרת היטב החל ממקום מסוים, ולכן הכוונה. נעיר שבמילא מספר סופי של איברים בתחילת הסדרה לא היו משפיעים על גבול (אפשר להתעלם מהם).

בכל המקרים, המסקנה היא בין היתר שהסדרה $a_n + b_n$ (או $a_n b_n$, וכו') מתכנסת.

משפט: משפט הסנדוויץ' לסדרות

אם $a_n \leq b_n \leq c_n$ לכל n (החל ממקום מסוים) ו- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ וגם $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ (אותו גבול L), אז $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

הגדרה: גבול אינסופי של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף, ונסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (או $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$), אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים ש- $a_n > M$.

נאמר ש- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים ש- $a_n < M$. במקרה $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, מספיק להוכיח עבור $M > 0$ בלבד (או אפילו עבור $M > 10^6$ בלבד). כנ"ל במקרה $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ עם $M < 0$ בלבד וכו'.

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר כי a_n מתכנסת במובן הרחב אם מתקיימת אחת משלוש האפשרויות הבאות: a_n מתכנסת, או שואפת לאינסוף, או שואפת למינוס אינסוף.

משפט: מבחני השורש והמנה לסדרות

תהי (a_n) סדרה אי-שלילית (כלומר, $a_n \geq 0$ לכל n). נניח ש- $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q$ קיים במובן הרחב, ונסמן את ערכו ב- q . אז:

1. אם $q < 1$, אז $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2. אם $q > 1$ (כולל האפשרות כי $q = \infty$), אז $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

באופן דומה, אם (a_n) סדרה חיובית (כלומר, $a_n > 0$ לכל n) והגבול $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים במובן הרחב, אז כנ"ל.