

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת1'

תרגול 2

חסמים וגבולות של סדרות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

חסמים

שאלה 1

חשבו את $\inf \{1 + x^2 : |x| < 1\}$.

שאלה 2

חשבו את $\sup \{1 + x^2 : |x| < 1\}$.

שאלה 3

תהא

$$A = \left\{ 3 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

אזי מתקיים:

א. הקבוצה A לא חסומה.ב. $\sup A - \inf A = 2$.ג. $\sup A = 3$.ד. $\inf A = 3$.ה. לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x \in A$ כך שמתקיים $x < 2 + 1/n$.

פתרון. שאלה זו נפתור דווקא בשיטת האלימינציה: נפסול את ארבע הטענות הראשונות, ולבסוף נוכיח את טענה ה. נרשום מספר איברים בקבוצה על מנת "לקבל תחושה" לגבי התנהגותה:

$$A = \left\{ 2, 3\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{4}, 2\frac{4}{5}, \dots \right\}$$

ולכן בשלב הזה נוכל לחשוד כי $7/2$ הוא הסופרמום של הקבוצה, ו-2 היא האינפימום. מעבר לכך,

מאחר שהם איברים בקבוצה, אז מספיק יהיה להוכיח שהקבוצה חסומה על ידס. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$2 \leq 3 + \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{7}{2}$$

ואכן, אי-שוויון זה שקול ל-

$$-n \leq (-1)^n \leq \frac{n}{2}$$

עבור $n = 1$ ועבור $n = 2$ הדבר מתקבל בהצבה, ועבור כל $n > 2$ מתקיים

$$-n < -1 \leq (-1)^n \leq 1 < \frac{n}{2}$$

בסך הכול הוכחנו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $2 \leq 3 + (-1)^n/n \leq 7/2$. בכך הראינו כי הקבוצה חסומה, וכן הראינו כי

$$\max A = \sup A = \frac{7}{2}, \quad \min A = \inf A = 2$$

ולמעשה פסלנו את תשובות א-ד ונותרנו עם תשובה ה כתשובה הנכונה.

נוכיח את תשובה ה. נרצה להראות כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x \in A$ כך שמתקיים $x < 2 + 1/n$. מאחר שהראינו כי $\inf A = 2$, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_0 \in A$ שעבורו

$$x_0 < \inf A + \varepsilon = 2 + \varepsilon$$

יהי $n \in \mathbb{N}$ כלשהו. נבחר $\varepsilon = 1/n$, ונקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x_0 \in A$ שעבורו $x_0 < 2 + 1/n$.

גבולות של סדרות

שאלה 4

הראו על פי הגדרה שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+4} = \frac{2}{3}$.

פתרון. יהי $\varepsilon > 0$. נעריך את המרחק

$$\left| \frac{2n-1}{3n+4} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{6n-3-6n-8}{9n+12} \right| = \frac{11}{9n+12} < \frac{11}{9n}$$

לכן אם נבחר $N = \left\lceil \frac{11}{9\varepsilon} \right\rceil + 1$, הרי שאם $n > N$ מתקיים

$$\left| \frac{2n-1}{3n+4} - \frac{2}{3} \right| < \frac{11}{9n} < \frac{11}{9N} \leq \varepsilon$$

הערות:

- הפתרון הקצר של התרגיל האחרון מכיל בדיוק את רמת הפירוט המינימלית.
- אין באמת חשיבות לכך ש- N טבעי, מלבד העובדה שהוא מסמל מספר סידורי שממנו והלאה מתקיים תנאי מסויים. למעשה, אם מוצאים מספר ממשי שכל מספר טבעי גדול ממנו מתאים בהגדרת הגבול, הרי שזה מספיק. בדרך כלל לא נקפיד על כך ש- N טבעי.

שאלה 5

קבעו אם הטענה הבאה נכונה או לא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שקיים $n > N$ שעבורו $|a_n - L| < \varepsilon$.

פתרון. לא נכון. התנאי "לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שקיים $n > N$ שעבורו $|a_n - L| < \varepsilon$ " אינו מספיק. למשל, עבור $L = 0$ נגדיר

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ זוגי} \\ 0 & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

והתנאי מתקיים, כי בכל צורה שנבחר את N נוכל לבחור $n > N$ כלשהו אי-זוגי, אבל הסדרה אינה מתכנסת ל-0.

שאלה 6

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת לגבול סופי L . הוכיחו כי אם $a_n \geq 0$ לכל n טבעי, אז $L \geq 0$. בהוכחה יש להשתמש בהגדרות בלבד, ואין להשתמש בתוצאות קודמות.

פתרון. הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L , ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

נניח בשלילה כי $L < 0$. נבחר

$$\varepsilon = -\frac{L}{2} > 0$$

אז קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$\frac{3L}{2} < a_n < \frac{L}{2} < 0$$

קיבלנו כי לכל $n \geq n_0$ מתקיים $a_n < 0$, בסתירה לנתון ש- $a_n \geq 0$ לכל n טבעי. מכאן שההנחה $L < 0$ הייתה שגויה, ולכן $L \geq 0$.

שאלה 7

הוכיחו באופן מלא, באמצעות הגדרת הגבול של סדרה, את המשפט הבא. נמקו את כל צעדיכם. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות מתכנסות, $a_n \rightarrow A$ ו- $b_n \rightarrow B$. אזי הסדרה $(a_n + b_n)$ מתכנסת ומתקיים $a_n + b_n \rightarrow A + B$.

פתרון. נתון כי $a_n \rightarrow A$. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נתון כי $b_n \rightarrow B$. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_2 כך שלכל $n \geq n_2$ מתקיים

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. אזי לכל $n \geq n_0$ מתקיימים גם $|a_n - A| < \varepsilon/2$ וגם $|b_n - B| < \varepsilon/2$.

יהי $\varepsilon > 0$. לכל $n \geq n_0$, מאי-שוויון המשולש מתקיים

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

מצאנו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$$

כלומר $a_n + b_n \rightarrow A + B$ מש"ל.

לעיון

משפט: תכונות הערך המוחלט

1. חיוביות בהחלט: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|x| \geq 0$, ויש שוויון $|x| = 0$ אם ורק אם $x = 0$.
2. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|x| \geq x$ וכן $|x| \geq -x$.
3. לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|xy| = |x||y|$. בפרט, $|-x| = |x|$.
4. יהי $a > 0$. אז $|x| < a$ אם ורק אם $-a < x < a$. באופן דומה, עבור $a \geq 0$, $|x| \leq a$ אם ורק אם $-a \leq x \leq a$.
5. אי-שוויון המשולש: לכל $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$. למעשה, גם $|x - y| \leq |x| + |y|$.
6. אי-שוויון המשולש ההפוך: לכל $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \geq ||x| - |y||$. למעשה, גם $|x + y| \geq ||x| - |y||$.

הגדרה: מקסימום ומינימום

תהי $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים ויהי $M \in \mathbb{R}$. נאמר כי M הוא מקסימום של A אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $M \in A$.
 2. לכל $a \in A$ מתקיים $a \leq M$.
- באופן דומה, מינימום של A הוא מספר $m \in A$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $a \geq m$.

הגדרה: סופרימום ואינפימום

תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. נאמר כי M הוא חסם עליון (supremum) של A ונסמן $M = \sup A$ אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. M חסם מלעיל של A .
 2. לכל חסם מלעיל M' של A מתקיים $M' \geq M$.
- באופן דומה, החסם התחתון $m = \inf A$ של A (infimum), אם קיים, הוא חסם מלרע m של A כך שלכל חסם מלרע m' של A מתקיים $m' \leq m$.

משפט: תכונות הסופרימום והאינפימום

1. תהי $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה חסומה מלעיל. אז ל- A יש מקסימום אם ורק אם $\sup A \in A$, ובמקרה זה $\max A = \sup A$.
2. החסם העליון הוא יחיד, אם הוא קיים.
3. תהי $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל. אז M הוא החסם העליון של A אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:
 (א) לכל $a \in A$, מתקיים $a \leq M$.
 (ב) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a > M - \varepsilon$.
 כנ"ל עבור חסם תחתון.

הגדרה: גבול של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L , ונסמן זאת על ידי $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (או $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$), אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים ש- $|a_n - L| < \varepsilon$.
 סדרה לא מתכנסת מכונה סדרה מתבדרת.