

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת'1

1 תרגול

אינדוקציה, ממוצעים ונוסחת הבינום

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

שאלה 1

הראו כי לכל n טבעי מתקיים

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

פתרון. נשים לב שיש להוכיח, בעצם, "אינסוף שוויונים". הראשון אומר ש-

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

(וזה אכן נכון), השני אומר ש-

$$1 + 4 = \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (2 \cdot 2 + 1)}{6}$$

(גם זה, ניתן לראות, נכון) וכן הלאה. כלומר, יש לנו למעשה סדרה של שוויונים להוכיח: שוויון מס' 1, שוויון מס' 2 (את שני אלה בדקנו ישירות - אך כמובן לא ניתן לבדוק ישירות את כולם, הרי יש אינסוף מהם!) וכו'. נוכיח אם כך את הטענה בעזרת עיקרון האינדוקציה: הוא אומר לנו לפעול בשני שלבים; בסיס האינדוקציה: נבדוק ששוויון מס' 1 (או, באופן כללי, טענה מס' 1) נכון. ואכן, בדקנו זאת לעיל.

צעד האינדוקציה: נוכיח שמתוך נכונות שוויון מס' n נובעת נכונות שוויון מס' $n+1$ (או, באופן כללי, מתוך נכונות טענה מס' n נובעת נכונות טענה מס' $n+1$). ובכן, נניח שידוע שוויון מס' n , כלומר, שידוע כי אכן

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

מתוך הנחה זו (אשר מכונה "הנחת האינדוקציה") יש כעת להוכיח את שוויון מס' $n+1$ - כלומר, יש להוכיח כי

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

נבצע אם כן את החשבון;

$$\begin{aligned}
 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + (n+1)^2 &= \underbrace{1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2}_{\text{ידוע מהנחת האינדוקציה}} + (n+1)^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
 &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}
 \end{aligned}$$

על מנת לסיים את הוכחת שוויון מס' $n+1$, יש אם כן לבדוק ש-

$$2n^2 + 7n + 6 = [(n+1) + 1][2(n+1) + 1]$$

פתיחת סוגריים פשוטה מראה שזה אכן המצב.

שאלה 2

הוכיחו את אי-שוויון ברנולי: לכל $x > -1$ מתקיים

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

לכל מספר טבעי n .

פתרון. יש לנו כעת סדרה של אי-שוויונים. נבדוק שאי-השוויון הראשון מתקיים (בסיס האינדוקציה):
אכן, אם מציבים $n=1$, מקבלים באגף שמאל של אי-השוויון את המספר $1+x$ ובאגף ימין גם כן את המספר $1+x$. לכן יש למעשה שוויון ואי-השוויון אכן מתקיים. כעת נעבור לצעד האינדוקציה; נניח שאי-שוויון מס' n הוא אכן נכון, כלומר, ש- $(1+x)^n \geq 1+nx$, ונעבור להוכחת אי-שוויון מס' $n+1$. לצורך כך נבצע את ההערכה

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \\
 &\quad \text{הנחת האינדוקציה ו- } 1+x > 0 \\
 &= 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \\
 &\quad \text{ } nx^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

שאלה 3

הוכיחו את אי-השוויון בין הממוצע החשבוני להנדסי: לכל $a_1, \dots, a_n > 0$ מתקיים

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

פתרון. שיטת ההוכחה כאן מכונה "אינדוקציה לאחור". היא מתבססת בחלקה על אינדוקציה רגילה, ולמעשה הרעיון הוא לחלוטין רעיון של אינדוקציה, אלא שהגישה מעט שונה: במקום להוכיח את נכונות הטענה עבור $n=1$, ואז לעבור מ- n ל- $n+1$, מתברר שכאן דווקא יותר קל (ללא קשר למקרה $n=1$) לבצע את ההיסק ההפוך: קל יותר להוכיח את נכונות הטענה ה- $n-1$ על סמך נכונות הטענה ה- n .

יש לשים לב, עם זאת, שגם אם נוכיח את העובדה הנ"ל, עוד לא סיימנו בהוכחת הטענה הכללית: אפשר לומר שחסר "בסיס" (כי כעת המקרה $n=1$ אינו מהווה בסיס מוצלח, היות וההתקדמות היא לאחור). למעשה אף ערך של n לא יכול להוות בסיס: לדוגמה, אם נוכיח את צעד האינדוקציה לאחור, וכן נוכיח בתור בסיס את המקרה $n=5$, הרי שנקבל את נכונות הטענה עבור $n=1, 2, 3, 4, 5$ בלבד. לכן בסיס

האינדוקציה לאחר מצריך בדיקה של אינסוף מקרים (אך כמובן, לא כולם, שכן אחרת הטענה הכללית עצמה כבר תוכח בשלב הבסיס). לדוגמה, יתכן ונוכל להוכיח כי לכל n זוגי, הטענה נכונה, ויחד עם צעד האינדוקציה לאחר זה כבר יסיים את ההוכחה. אין זה משנה מיהם ערכי n שנבחר לשמש כבסיס, העיקר שיש אינסוף מהם (מפני שאז לכל מספר סידורי יש n אחריו שעבורו הטענה נכונה בזכות בסיס האינדוקציה לאחר, ויחד עם צעד האינדוקציה לאחר הטענה נכונה גם עבור אותו מספר סידורי). נסכם:

בסיס האינדוקציה לאחר: נוכיח כי הטענה נכונה עבור אינסוף ערכים של n – אצלנו, עבור כל החזקות של 2.

הערה: בדרך כלל את בסיס האינדוקציה לאחר מוכיחים בעזרת אינדוקציה רגילה – ואכן, כך יהיה המקרה גם כאן.

צעד האינדוקציה לאחר: נוכיח שאם הטענה נכונה עבור n , אז היא נכונה עבור $n - 1$. נתחיל אם כן בבסיס האינדוקציה לאחר, אותו נוכיח בעזרת אינדוקציה רגילה. נבדוק שכאשר $n = 2^k$ (כלומר, כאשר מדובר בממוצעים של 2^k איברים עבור איזשהו k), אי־השוויון אכן מתקיים. נתחיל בבסיס האינדוקציה – כאן, אינדוקציה רגילה על k , ולכן פשוט נבדוק את המקרה $k = 1$ (או $n = 2$). כלומר, יש לבדוק שאם $a, b > 0$ אזי

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

זאת נבדוק באמצעות ביצוע פעולות הפיכות על אי־השוויון אותו יש להוכיח, והגעה לאי־שוויון ידוע:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{ab} \leq a+b &\iff 4ab \leq (a+b)^2 \iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \\ &\iff 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \iff 0 \leq (a-b)^2 \end{aligned}$$

וזה כמובן נכון. יש לשים לב שכל הפעולות הן אכן הפיכות מפני שמדובר במספרים חיוביים. נעבור כעת לצעד האינדוקציה (הרגילה!). נניח שהטענה נכונה עבור k – כלומר, שלכל בחירה של 2^k מספרים חיוביים מתקיים אי־השוויון – ונוכיח שהיא נכונה עבור $k+1$. אכן, נבחר 2^{k+1} מספרים חיוביים – שלצורך פשטות הסימון נסמן $a_1, \dots, a_{2n}$ (כאשר $n = 2^k$ – ואז $2^{k+1} = 2n$), וניעזר בהנחת האינדוקציה ובבסיס האינדוקציה.

הערה: כאן נעזרים בנכונות בסיס האינדוקציה על מנת להוכיח את צעד האינדוקציה – לפעמים זה נוח.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_{2n}} &= \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdots a_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}}} \\ &\leq \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}}}{2} \leq \frac{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}}{2} \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n} \end{aligned}$$

כלומר, הטענה נכונה עבור $k+1$.

נעבור כעת לצעד האינדוקציה לאחר. לצורך כך נניח את נכונות אי־השוויון עבור n מספרים, ונוכיח אותו עבור $n-1$. כלומר, נניח כעת שנתונים $a_1, \dots, a_{n-1} > 0$, ונרצה להוכיח כי

$$\sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$$

לצורך כך נתבונן ב- n המספרים החיוביים $a_1, \dots, a_{n-1}, A$, כאשר A הנו הממוצע החשבוני של $a_1, \dots, a_{n-1}$.

הערה: כלומר, משלימים את $n-1$ המספרים המקוריים ל- n מספרים על ידי הוספת הממוצע החשבוני שלהם. מובן היה שנצטרך לבצע השלמה כלשהי ל- n מספרים, הרי ברצוננו להשתמש בנכונות אי-השוויון עבור n , והממוצע החשבוני של $n-1$ המספרים נראה בחירה נבונה במצב הנוכחי.

כעת, על סמך הנחת האינדוקציה לאחר, ידוע כי

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n-1} \cdot A} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + A}{n}$$

אך החשבון הפשוט

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + A}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} = A$$

מוכיח שניתן כעת להסיק (על ידי חלוקת שני אגפי אי-השוויון ב- $\sqrt[n]{A}$) כי

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n-1}} \leq A^{1-\frac{1}{n}}$$

או, אם נעלה בחזקת n , כי

$$a_1 \cdots a_{n-1} \leq A^{n-1}$$

אך כעת הוצאת שורש מסדר $n-1$ מאי-השוויון מסיימת את ההוכחה!

הערות:

- בניסוח אי-השוויון נדרש שכל המספרים $a_1, \dots, a_n$ יהיו חיוביים. אין זה באמת הכרחי שהם לא יהיו אפס – כלומר, די לדרוש שכל המספרים הם אי-שליליים. די שאחד מהם יהיה אפס על מנת שהממוצע ההנדסי יהיה אפס, ובכך אי-השוויון מתקיים בבירור.
- הממוצע החשבוני וההנדסי שווים אם ורק אם כל המספרים להם עושים ממוצע הם בעצם אותו מספר – כלומר, $a_1 = \cdots = a_n$. אחרת, אי-השוויון הוא אי-שוויון "אמיתי" (או "חריף").

שאלה 4

הוכיחו את אי-השוויון בין הממוצע ההנדסי להרמוני: לכל $a_1, \dots, a_n > 0$ מתקיים

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

זה ישלים את הוכחת אי-השוויון הממוצעים.

פתרון. נסמן $b_i = \frac{1}{a_i}$. נקבל מספרים חיוביים $b_1, \dots, b_n$, ולכן מתקיים עבורם (על סמך התרגיל הקודם) אי-השוויון

$$\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} \leq \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

נציב חזרה $b_i = \frac{1}{a_i}$ ונקבל

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

מכך נובע בדיוק אי-השוויון הרצוי.

הערה: ניתן היה אולי "לחשוש" שתידרש עוד הוכחה ארוכה כמו עבור הוכחת אי-השוויון בין הממוצע החשבוני להנדסי, אבל למעשה השתמשנו בידע הקודם על אי-השוויון הזה כדי להסיק בקצרה את אי-השוויון המבוקש.

נוסחת הבינום

שאלה 5

לכל $0 \leq k \leq n$ שלמים נגדיר

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ ולכל $1 \leq k \leq n-1$ שלמים מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

פתרון. נחשב:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

שאלה 6

לכל $0 \leq k \leq n$ שלמים נגדיר

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

הוכיחו כי לכל $a, b \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

פתרון. נוכיח את הבינום של ניוטון באינדוקציה.

בסיס עבור $n=1$:

$$(a+b)^1 = a+b$$

–1

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b$$

לכן הבסיס הוכח.

הנחת האינדוקציה נניח שעבור מספר שלם $n \geq 1$, הנוסחה מתקיימת:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

צעד האינדוקציה נראה כי הנוסחה מתקיימת עבור $n + 1$:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

לפי הנחת האינדוקציה. נפריד את הסכומים:

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

נחליף אינדקסים בסכום השני על ידי הגדרת $j = k + 1$:

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-j+1} b^j$$

נשלב את הסכומים לסכום אחד תוך הפרדת המקרים $k = 0$, $j = n + 1$ אשר אינם משותפים, כאשר אין משמעות להבדל בשמות האינדקסים j, k :

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1}$$

לכן לפי זהות פסקל,

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

לכן סיימנו.

לעיון

משפט: עיקרון האינדוקציה

נניח שנתונה סדרה של טענות (כלומר, טענה מס' 1, טענה מס' 2, טענה מס' 3 וכן הלאה) כך שטענה מספר 1 נכונה, וכן מתוך נכונות טענה n נובעת נכונות טענה $n + 1$. אז כל הטענות שבסדרה הן טענות נכונות.

משפט: הבינום של ניוטון

לכל $0 \leq k \leq n$ שלמים נגדיר

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

לכל $a, b \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$