

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ת'1

1 תרגול

אינדוקציה, ממוצעים ונוסחת הבינום

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בתרגולים.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בקורס בפועל.
- **לסטודנטים:** חשוב להכיר את הניסוחים המלאים והמדויקים של כל המשפטים ואת הוכחותיהם.
- יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מופיעים ברשימת התוצאות שלהלן.
- דיווחים על טעויות והצעות לשיפור במייל ymaayan@technion.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

שאלה 1

הראו כי לכל n טבעי מתקיים

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

שאלה 2

הוכיחו את אי-שוויון ברנולי: לכל $x > -1$ מתקיים

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

לכל מספר טבעי n .

שאלה 3

הוכיחו את אי-השוויון בין הממוצע החשבוני להנדסי: לכל $a_1, \dots, a_n > 0$ מתקיים

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

הערות:

- בניסוח אי-השוויון נדרש שכל המספרים $a_1, \dots, a_n$ יהיו חיוביים. אין זה באמת הכרחי שהם לא יהיו אפס – כלומר, די לדרוש שכל המספרים הם אי-שליליים. די שאחד מהם יהיה אפס על מנת שהממוצע ההנדסי יהיה אפס, ובכך אי-השוויון מתקיים בבירור.
- הממוצע החשבוני וההנדסי שווים אם ורק אם כל המספרים להם עושים ממוצע הם בעצם אותו מספר – כלומר, $a_1 = \dots = a_n$. אחרת, אי-השוויון הוא אי-שוויון "אמיתי" (או "חריף").

שאלה 4

הוכיחו את אי-השוויון בין הממוצע ההנדסי להרמוני: לכל $a_1, \dots, a_n > 0$ מתקיים

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

זה ישלים את הוכחת אי-שוויון הממוצעים.

הערה: ניתן היה אולי "לחשוש" שתידרש עוד הוכחה ארוכה כמו עבור הוכחת אי-השוויון בין הממוצע החשבוני להנדסי, אבל למעשה השתמשנו בידע הקודם על אי-השוויון הזה כדי להסיק בקצרה את אי-השוויון המבוקש.

נוסחת הבינום

שאלה 5

לכל $0 \leq k \leq n$ שלמים נגדיר

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ ולכל $1 \leq k \leq n-1$ שלמים מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

שאלה 6

לכל $0 \leq k \leq n$ שלמים נגדיר

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

הוכיחו כי לכל $a, b \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

לעיון

משפט: עיקרון האינדוקציה

נניח שנתונה סדרה של טענות (כלומר, טענה מס' 1, טענה מס' 2, טענה מס' 3 וכן הלאה) כך שטענה מספר 1 נכונה, וכן מתוך נכונות טענה n נובעת נכונות טענה $n + 1$. אז כל הטענות שבסדרה הן טענות נכונות.

משפט: הבינום של ניוטון

לכל $0 \leq k \leq n$ שלמים נגדיר

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

לכל $a, b \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$