

הרצאה 13: יחידות בעזרת אינטגרל אנרגיה, גרעין החום

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

3	1 משוואת החום (המשך)
3	1.1 פתרון עבור מוט סופי בעזרת הפרדת משתנים (המשך)
3	1.2 גרעין החום

When you don't want to do a convolution



תזכורות

הגדרה: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ תהי פונקציה, אם היא מוגדרת, היא הפונקציה $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ שמוגדרת על ידי

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

נהוג לסמן $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$, ולפעמים גם $F(\omega)$.

הביטויים הבאים נתונים בתור תזכורות, ללא התייחסות מדויקת לתחומים או לערכים שבהם הם תקפים.

מספר	פונקציה	התמרה	תנאים	מספר	ביטוי	התמרה	תנאים
1	$e^{-a x }$	$\frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)}$	$a > 0$	1	$f(x+b)$	$e^{i\omega b} \hat{f}(\omega)$	
2	$\chi_{[-b,b]}$	$\frac{\sin(\omega b)}{\omega \pi}$	$b > 0, \omega \neq 0$	2	$f(ax)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$a \neq 0$
3	e^{-ax^2}	$\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$	$a > 0$	3	$e^{icx} f(x)$	$\hat{f}(\omega - c)$	
4	$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{2a} e^{-a \omega }$	$a > 0$	4	$f'(x)$	$i\omega \hat{f}(\omega)$	
5	$e^{-ax} \chi_{[0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)}$	$a > 0$	5	$xf(x)$	$i \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega)$	
6	$e^{ax} \chi_{(-\infty,0]}(x)$	$\frac{1}{2\pi(a-i\omega)}$	$a > 0$	6	$f * g$	$2\pi \hat{f} \hat{g}$	

1 משוואת החום (המשך)

1.1 פתרון עבור מוט סופי בעזרת הפרדת משתנים (המשך)

הוכחת יחידות בעזרת אינטגרל אנרגיה

משפט 1: לבעיה

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x, t), & t > 0, a < x < b, \\ u(x, 0) = f(x), & a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = A(t), & t \geq 0, \\ u(b, t) = B(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

יש לכל היותר פתרון אחד.

1.2 גרעין החום

הבעיה של מוט אינסופי דו צדדי

נעבור כעת למוט אינסופי דו צדדי. כלומר, נחפש פתרון לבעיה

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

פירוש: בזמן $t = 0$ נתון פיזור חום $f(x)$ לאורך מוט אינסופי דו צדדי, ואנו מעוניינים לדעת את פיזור החום $u(x, t)$ בכל זמן $t > 0$.

נעיר שלבעית החום (1) אין פתרון יחיד, אבל אנחנו נמצא פתרון שהוא במובן מסוים הפיסיקלי ביותר.

פתרון בעזרת התמרת פורייה

במקרה שבו x חסום בקטע, השתמשנו בטורי פורייה על מנת למצוא פתרון. האנלוג של טור פורייה לפונקציה שמוגדרת בכל $\mathbb{R}$ הוא **התמרת פורייה**.

נפעיל אם כך התמרת פורייה לפי המשתנה x על הבעיה. כלומר, נגדיר

$$U(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$$

ונזכיר כי לפי תכונות של התמרת פורייה,

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] (\omega, t) = (i\omega)^2 U(\omega, t) = -\omega^2 U(\omega, t)$$

נעיר שאין הכרח כי התמרת פורייה תהיה מוגדרת וגזירה, הרי יש תנאים אשר צריכים להתקיים לשם כך. אנו לא שואפים אם כן למצוא פתרון של בעית המוט האינסופי הדו צדדי (1) **לכל** פונקציה $f(x)$, אלא רק לקבל תחושה כללית של צורת הפתרון.

בנוסף, תחת הנחות מתאימות, כלל לייבניץ לגזירת אינטגרל פרמטרי יתן כי

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] (\omega, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) e^{-i\omega x}) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx \right) = U_t(\omega, t) \end{aligned}$$

נקבל אם כך מתוך הבעיה (1) את הבעיה הבאה עבור התמרת פורייה של הפתרון:

$$\begin{cases} U_t + k\omega^2 U = 0 & \omega \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(\omega, 0) = F(\omega) & \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$$

כאשר $F(\omega)$ היא התמרת פורייה של $f(x)$.

זו בעיה שניתן לפתור באופן ישיר; אין נגזרת לפי ω במד"ח ולכן זו מד"ר בהסוואה. הפתרון הוא

$$U(\omega, t) = F(\omega) e^{-k\omega^2 t} \quad (2)$$

נמצא פונקציה $K_0(x, t)$ אשר התמרת פורייה שלה לפי x מקיימת

$$\mathcal{F}[K_0](\omega, t) = e^{-k\omega^2 t}$$

בעזרת תכונות של התמרת פורייה והתמרות מוכרות, נוכל לבחור

$$K_0(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

לכן לפי תכונת ההתמרה של קונבולוציה והביטוי (2), נקבל כי

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} (f * K_0)(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) K_0(x - y, t) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy$$

גרעין החום ונוסחה לפתרון

הגדרה: הפונקציה

$$K(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \quad t > 0 \quad (3)$$

מכונה **גרעין החום**.

בכך הדגמנו את הרעיון מאחורי המשפט הבא.

משפט 2: תהי $f(x)$ רציפה וחסומה בכל $\mathbb{R}$. אז הפונקציה

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) K(x, y, t) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \quad (4)$$

היא פתרון אמיתי של בעית המוט האינסופי (1). בנוסף, $u(x, t)$ גזירה ברציפות מכל סדר עבור $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

הערות:

• הפתרון אינו יחיד.

מעניין לשים לב בהקשר זה כי $t = 0$ הוא קו אופייני של המד"ח.

• אם f חסומה אבל לא דווקא רציפה בכל נקודה, נקבל פתרון מוכלל $u(x, t)$ אשר בכל זאת גזיר ברציפות מכל סדר עבור $x \in \mathbb{R}, t > 0$. במקרה זה, $u(x, t)$ תשאף אל $f(x)$ כאשר $t \rightarrow 0+$ בכל נקודת רציפות של f .

מהירות התפשטות אינסופית

הפתרון $u(x, t)$ אשר נתון בנוסחה (4) מאפשר להיווכח בתופעה מוזרה של משוואת החום. נניח כי $f(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ פרט לאזור קטן סביב $x_0 = 0$, שם $f(x) > 0$. אז

$$u(x, t) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

כלומר, אם נעביר מוט מכדור הארץ אל אלפא קנטאורי¹ ונחמם את המוט אצלנו בכדור הארץ ברגע מסוים, המוט יתחמם באופן מיידי גם באלפא קנטאורי.

לכן, כביכול, ניתן להעביר אינפורמציה באופן מיידי בעזרת חימום של מוט. זה כמובן לא אפשרי במציאות, וניתן להסבר על ידי כך שמשוואת החום אינה תקפה במימדים כאלה אלא מהווה קירוב בלבד.

תכונות של גרעין החום

משפט 3:

1. גרעין החום גזיר ברציפות מכל סדר בתחום $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$

2. לכל $x, y \in \mathbb{R}$ ו- $t > 0$ מתקיים כי

$$\frac{\partial K}{\partial t} - k \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = 0$$

(וכנ"ל לפי y , לפי סימטריה של גרעין החום).

3. גרעין החום חיובי לכל $x, y \in \mathbb{R}, t > 0$ ובנוסף

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, y, t) dy = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0$$

לא נפרט את הוכחת המשפט.

נעיר לבסוף שלכל פונקציה רציפה וחסומה $f(x)$ בכל $\mathbb{R}$, לפי משפט 2,

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) K(x, y, t) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

לכן אפשר לחשוב על $K(x, y, t)$ בתור דלתא של דיראק $\delta(y - x)$ כאשר $t \rightarrow 0^+$. כלומר, דרך אחת לקבל אינטואיציה עבור גרעין החום היא בתור פתרון של הפסאודו (בגלל דלתא של דיראק) בעיה עם פרמטר $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} K_t - k K_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ K(x, y, 0) = \delta(x - y) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

במילים אחרות, מתאר את פיזור החום במוט אינסופי אשר בזמן $t = 0$ קיבל "הלם חום" בנקודה y .

¹מערכת כוכבים הממוקמת בערך 4.37 שנות אור מכדור הארץ.

פונקצית השגיאה

הפונקציה הבאה שימושית במקרים פשוטים של פתרון בעיות חום, בגלל צורת הפתרון (4).

הגדרה: פונקצית השגיאה מוגדרת על ידי

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$$

דוגמה: נמצא פתרון מוכלל עבור בעית ההתחלה

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

כאשר

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

אינטואיטיבית, מחברים בזמן $t=0$ שני מוטות אינסופיים (חד צדדיים) אשר בכל אחד מהם הטמפרטורה קבועה. במוט הימני יש טמפרטורה גבוהה יותר $T=1$, ובמוט השמאלי נמוכה יותר $T=0$. החום מתחיל לזרום מהמוט הימני לשמאלי, ואנו מחפשים את פילוג הטמפרטורה בכל זמן.

נציב את f בצורת הפתרון (4) ונקבל

$$u(x, t) = \int_2^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \quad (5)$$

כדי להיפטר מהאינטגרל, ננסה להגיע להגדרת פונקצית השגיאה באמצעות שינוי משתנה $s = \frac{y-x}{2\sqrt{t}}$ עבורו $ds = \frac{1}{2\sqrt{t}} dy$. נקבל

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2-x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} ds - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{2-x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{2-x}{2\sqrt{t}}\right)$$

בשוויון האחרון בדוגמה, השתמשנו בתכונה הבאה של פונקצית השגיאה (אינטגרל מוכר).

משפט 4: מתקיים כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} ds = 1$$

פירוש פיסיקלי של פתרונות באמצעות גרעין החום

נסיים באינטואיציה לגבי הפתרון שהתקבל בדוגמה, ובכלל לגבי משוואת החום.

הפתרון (5) ניתן לפירוש הסתברותי באופן הבא.

נסמן על ידי X משתנה מקרי גאוסי בעל פילוג $X \sim N(x, 2t)$. אז

$$u(x, t) = \mathbb{P}(X > 2)$$

כלומר: הטמפרטורה בנקודה x בזמן t שווה להסתברות שחלקיק שמבצע הילוך מקרי רציף מהנקודה x בזמן $t = 0$, נמצא מימין לנקודה 2 בזמן t .

כדי להבין את ההגיון מאחורי פירוש זה, נחשוב על צפיפות של חלקיקי גז במקום על חום.

אם בזמן $t = 0$ יש צפיפות אחידה גבוהה של חלקיקים בקטע $(2, \infty)$, וצפיפות אחידה נמוכה בקטע $(-\infty, 2)$, ופוחים פתח בין שני החלקים, החלקיקים יבצעו דיפוזיה אל האזור בצפיפות נמוכה.

במקרה כזה אפשר להמיר בקירוב מצוין את הטיפול הבלתי אפשרי באינטראקציה בין מספר אדיר של חלקיקים, למודל בו כל חלקיק מבצע באופן עצמאי (כלומר, בלי תלות בחלקיקים האחרים) הילוך מקרי רציף.

צפיפות החלקיקים בסביבת הנקודה x בזמן t תהיה לכן פרופורציונלית להסתברות שבהילוך מקרי כזה, חלקיק המתחיל מימין לנקודה 2 יגיע לאזור הנקודה x בזמן t .

זה כמעט תואם לתוצאה שקיבלנו, אם כי יש היפוך נסיבתי שמושאר כתרגיל מחשבתי.

“

These motions were such as to satisfy me, after frequently repeated observation, that they arose neither from currents in the fluid, nor from its gradual evaporation, but belonged to the particle itself.

”

Robert Brown