

הרצאה 12: משוואת החוס

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 משוואת החוס
2	1.1 מוט סופי
3	1.2 עיקרון המקסימום בפס, יחידות ויציבות
5	1.3 פתרון עבור מוט סופי בעזרת הפרדת משתנים

"I bet all my answers are correct"

My answers:

✗ Sorry, that's not correct.

Sorry, your answer is not correct.

Correct answer:
$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} e^{-13(2n+1)^2 t} \sin((2n+1)x) \right)$$

Your answer: 17

1 משוואת החום

1.1 מוט סופי

משוואת החום

בפרק הזה נדבר על משוואת החום,

$$u_t - ku_{xx} = 0$$

המספר $k > 0$ קבוע ומכונה **קבוע התפשטות החום**.

הגודל $u(x, t)$ מתאר את כמות החום בנקודה x בזמן t .

המשוואה מתארת את החוק הפיסיקלי של פיזור חום. היא מקרה פרטי של **משוואת דיפוזיה** אשר מתארת התפשטות של חומר או חום.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

1. הערך u_{xx} הוא מדד דיפרנציאלי להפרש בין ממוצע ערכיה בכל הנקודות ה"קרובות" לנקודה נתונה, לבין ערך הפונקציה בנקודה.

במשוואת הגלים, התאוצה u_{tt} פרופורציונלית להפרש זה. זה הגיוני, במובן שהפרש זה קובע את הכוח הפועל על אותה נקודה ו"מושך" אותה לשנות את מיקומה, והתאוצה פרופורציונלית לכוח לפי החוק השני של ניוטון.

במשוואת החום, קצב השינוי u_t פרופורציונלי להפרש זה. זה תואם למסקנה מהחוק השני של התרמודינמיקה, לפיו חום "זורם" מאזורים חמים יותר אל אזורים חמים פחות.

2. אם במשוואת הגלים דיברנו על מיתרים, במשוואת החום נדבר על מוטות. כלומר, יש לדמיין מוט אשר עשוי מחומר מוליך חום.

3. הבדל מעניין במיוחד בין משוואת הגלים לבין משוואת החום הוא רגישות להיפוך הזמן.

אם $u(x, t)$ פתרון של משוואת הגלים, אז גם $u(x, -t)$ פתרון שלה. זה לא נכון עבור משוואת החום. זהו תסמין נוסף של החוק השני של התרמודינמיקה, שבו לכיווניות הזמן יש חשיבות מרכזית: "האנטרופיה תמיד גדלה עם הזמן".

מוט סופי רגולרי

כדי להתמודד עם מוט סופי, השיטה העיקרית תהיה הפרדת משתנים - כמו עבור מיתר סופי.

הסוג הראשון של מוט סופי שנפתור בעזרת הפרדת משתנים נתון בבעיה הכללית הבאה.

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t) & a < x < b, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & a \leq x \leq b \\ \alpha u(a, t) + \beta u_x(a, t) = 0 & t \geq 0 \\ \gamma u(b, t) + \delta u_x(b, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

כאשר α, β אינם שניהם 0, וכן γ, δ אינם שניהם 0.

תנאי השפה (שתי השורות התחתונות ב-(1)) מכונים **תנאי שפה רגולריים**, כמו בבעיות היפרבוליות.

הבעיה הזו מאפשרת לבטא כל מיני מצבים, כמו למשל:

1. מוט המחובר לאמבט חום בשני קצותיו, כמו $u(a, t) = u(b, t) = 0$.
2. מוט מבודד בשני קצותיו, $u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0$.
3. מוט המחובר לאמבט חום בקצה אחד ומבודד בקצה השני, $u_x(a, t) = u(b, t) = 0$ או להיפך.
בנוסף, ניתן לתאר כל מיני מצבים נוספים בהתאם לבחירת $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

מוט סופי מחזורי

הסוג השני של מוט סופי שנפתור בעזרת הפרדת משתנים נתון בבעיה הכללית הבאה.

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t) & a < x < b, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & a \leq x \leq b \\ u(a, t) = u(b, t) & t \geq 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

תנאי השפה (שתי השורות התחתונות ב-(2)) מכונים **תנאי שפה מחזוריים**.

תנאי שפה אלו מבטאים **לולאה**: הנקודה $x = a$ היא אותה נקודה כמו $x = b$ על המוט "במציאות".

1.2 עיקרון המקסימום בפס, יחידות ויציבות

עיקרון המקסימום החלש

עיקרון המקסימום אינו ייחודי לפונקציות הרמוניות או באופן כללי לבעיות אליפטיות.

נניח למשל שנתון מוט סופי מבודד, עם פילוג חום ידוע בזמן $t = 0$. נניח שהחום המקסימלי בזמן $t = 0$ הוא M . אז בכל זמן $t > 0$, הנקודה החמה ביותר במוט לא יכולה להיות חמה יותר מאשר M . לכן במקרה זה, המקסימום מתקבל עבור $t = 0$, כלומר, על השפה.

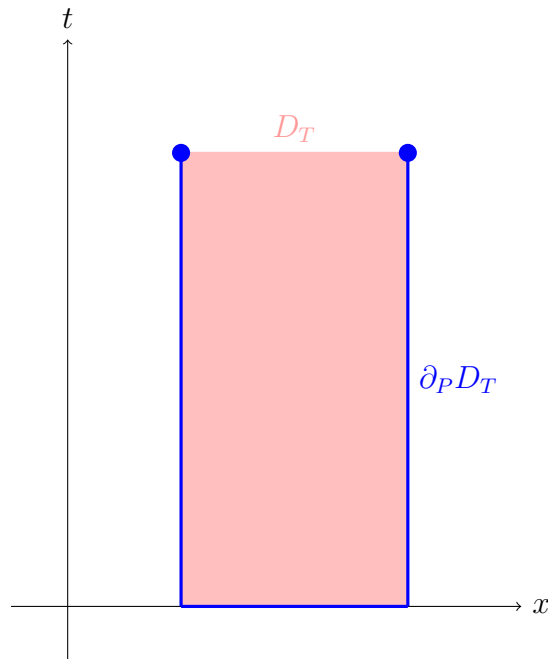
באופן כללי, אם החום אינו מבודד, זה כבר לא בדיוק עובד באופן זה. בכל זאת, ניקח זמן סופי $T > 0$ ונתבונן במלבן

$$D_T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, 0 < t \leq T\}$$

נקודה עדינה אך חשובה היא שהנקודות (x, T) עבור $a < x < b$ כלולות ב- D_T .

הגדרה: השפה הפרבולית של התחום D_T מוגדרת על ידי

$$\partial_P D_T = ([a, b] \times \{0\}) \cup (\{a, b\} \times [0, T])$$



כלומר, השפה הפרבולית $\partial_P D_T$ מורכבת מהצלע התחתונה ומשתי הצלעות האנכיות של המלבן D_T , ללא הצלע העליונה. חלק השפה העליון מתאים לזמן $t = T$. אנחנו לא מצפים למצוא שם מקסימום, להוציא אולי עבור $x = a, b$: אם נסתכל בדוגמה של המוט המבודד, לא סביר שהרגע החם ביותר יהיה דווקא רגע חיובי ובאמצע המוט.

אפשר כעת לנסח עיקרון כללי.

משפט 1: תהי $u(x, t)$ רציפה במלבן הסגור $\overline{D_T}$, ונניח בנוסף שהנגזרות החלקיות u_t, u_{xx} קיימות ורציפות ב- D_T . אם $u_t - ku_{xx} = 0$ בכל המלבן D_T , אז המקסימום והמינימום של u על $\overline{D_T}$ מתקבלים על השפה הפרבולית:

$$\max_{\overline{D_T}} u = \max_{\partial_P D_T} u, \quad \min_{\overline{D_T}} u = \min_{\partial_P D_T} u$$

הערות:

- בנקודות מהצורה (x, T) כאשר $a < x < b$, הסימון $u_t(x, T)$ מתייחס אל הנגזרת החד צדדית $u_t^-(x, T)$ היות שהפונקציה $u(x, t)$ מוגדרת אולי עבור $0 \leq t \leq T$ בלבד.
- מתקיים כי $\overline{D_T} = D_T \cup \partial_P D_T$, וזה איחוד זר.

יחידות

מסקנה 2: לבעיית דיריכלה

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (a, b), t \in (0, T], \\ u(a, t) = A(t), & t \in [0, T], \\ u(b, t) = B(t), & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [a, b] \end{cases}$$

יש פתרון אחד לכל היותר.

יציבות

מסקנה 3: בעית דיריכלה ההומוגנית

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (a, b), t \in (0, T], \\ u(a, t) = A(t), & t \in [0, T], \\ u(b, t) = B(t), & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [a, b] \end{cases}$$

היא יציבה. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם

$$|A_2(t) - A_1(t)| < \delta, |B_2(t) - B_1(t)| < \delta, |f_2(x) - f_1(x)| < \delta, \forall x \in [a, b], t \in [0, T]$$

ואם $u_1(x, t), u_2(x, t)$ פתרונות בהתאמה, אז

$$|u_2(x, t) - u_1(x, t)| < \varepsilon, \forall (x, t) \in \overline{D_T}.$$

הערה: המשפט נכון וניתן להוכיח באותו אופן במקרה האי הומוגני, בתנאי שהחלק האי הומוגני משותף לשני הפתרונות.

1.3 פתרון עבור מוט סופי בעזרת הפרדת משתנים

בעית התחלה שפה פרבולית כללית

כמו במשוואת הגלים, השיטה של הפרדת משתנים תעבוד באותו אופן בדיוק עבור מוט סופי ועבור מד"ח אחרות, כל עוד הן ניתנות לכתיבה באופן הבא. ראשית, המד"ח ותנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{r(x)m(t)} ((p(x)u_x)_x + q(x)u) = F(x, t) & a < x < b, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & a \leq x \leq b \end{cases} \quad (3)$$

הנחות כלליות:

- הפונקציות $q(x), r(x)$ רציפות, והפונקציה $p(x)$ גזירה ברציפות בקטע $[a, b]$.
- הפונקציה $m(t)$ רציפה וחיובית עבור $t \geq 0$.
- לכל $x \in [a, b], r(x), p(x) > 0$.

שנית, כמו בבעיות היפרבוליות, עבור תנאי השפה יש שתי אפשרויות נפרדות.

לעיתים יהיו נתונים **תנאי שפה רגולרים** (אשר יובילו לבעית שטורם ליוביל רגולרית)

$$\begin{cases} \alpha u(a, t) + \beta u_x(a, t) = 0 & t \geq 0 \\ \gamma u(b, t) + \delta u_x(b, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

כאשר α, β אינם שניהם 0, וכן γ, δ אינם שניהם 0.

לעיתים יהיו נתונים **תנאי שפה מחזוריים** (אשר יובילו לבעית שטורם ליוביל מחזורית)

$$\begin{cases} u(a, t) = u(b, t) & t \geq 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

במקרה המחזורי, נוסף דרישות על מקדמי המשוואה p, q, r שיקיימו את תנאי המחזוריות:

$$p(a) = p(b), \quad p'(a) = p'(b), \quad q(a) = q(b), \quad r(a) = r(b)$$

נזכיר:

הערות:

- אם תנאי תאימות אינם מתקיימים (למשל, שוויון בפינות) אז אין פתרון אמיתי מראש.
- אם תנאי תאימות מתקיימים (למשל, שוויון בפינות) אז צריך לבדוק בסוף אם הפתרון שהתקבל אמיתי או לא. לא ניסחנו משפט שאומר כי הפתרון בהכרח אמיתי במצב זה, אבל ננסח ונוכיח כזה משפט במקרה פרטי מסוים בקרוב.

פתרון עבור בעית זיריכלה הומוגנית

נמצא פתרון מוכלל עבור הבעיה

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(L, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

כאשר $f(x)$ היא פונקציה רציפה למקוטעין כלשהי.

הפקת בעית שטורם ליוביל נציב $X(x)T(t)$ לתוך המד"ח ותנאי השפה ונקבל

$$\begin{cases} X(x)T'(t) - kX''(x)T(t) = 0 & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

לכן $X(0) = X(L) = 0$ ובנוסף

$$-\lambda := \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)}$$

קיבלנו את בעית שטורם ליוביל המוכרת

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

פתרון בעית שטורם ליוביל כבר ראינו בעבר (או, בדקו) שהערכים העצמיים הם $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ והפונקציות העצמיות הן

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

פיתוח לפי פונקציות עצמיות נפתח

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

כאשר

$$A_n = \frac{\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

נציין שהסימון $\sim$ במקום = הוא כי לא ידוע בשלב זה שהטור מתכנס נקודתית אל הפונקציה $f(x)$ אלא רק **בנורמה**. בשלב בדיקת האמיתיות נדייק יותר.

מצאת הפתרון נציב

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

לתוך המד"ח ותנאי ההתחלה.

נעיר שהמד"ח הומוגנית ולכן הצבה לתוכה תפיק את המד"ר שהתקבלה עבור $T(t)$ עם הערך העצמי המתאים. אבל נציב ישירות ונראה שאכן,

$$\begin{aligned} 0 = u_t - k u_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - k \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot \left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a'_n(t) + \frac{n^2 \pi^2 k}{L^2} a_n(t)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

לכן

$$a'_n(t) + \frac{n^2 \pi^2 k}{L^2} a_n(t) = 0$$

נציב כעת לתנאי ההתחלה ונקבל לפי יחידות הפיתוח כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

לכן $a_n(0) = A_n$, ובסך הכל קיבלנו את בעית ההתחלה

$$\begin{cases} a'_n(t) + \frac{n^2 \pi^2 k}{L^2} a_n(t) = 0 & t > 0 \\ a_n(0) = A_n \end{cases}$$

הפתרון של בעית התחלה זו הוא

$$a_n(t) = A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k}{L^2} t}$$

לכן קיבלנו בסך הכל כי

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

צריך עוד להבין אם זהו פתרון אמיתי או לא.

דוגמאות של תנאי שפה פשוטים בבעיית דיריכלה ההומוגנית

נראה מספר דוגמאות של פתרונות של בעיות מהצורה (6). כלומר, ניקח מספר דוגמאות של תנאי התחלה $f(x)$.

דוגמאות:

1. ניקח את $f(x) = \sin(4x) - \sin x$ בקטע $[0, 2\pi]$.

כאן $L = 2\pi$ ולכן הפונקציות העצמיות הן $\sin\left(\frac{x}{2}\right), \sin(x), \sin\left(\frac{3x}{2}\right), \dots$.
לכן $\sin x, \sin(4x)$ פונקציות עצמיות, ו-

$$f(x) = X_8(x) - X_2(x)$$

כלומר, בפיתוח של f לפי פונקציות עצמיות, $A_2 = -1$ וכן $A_8 = 1$, וכל המקדמים האחרים מתאפסים. נקבל אם כך לפי צורת הפתרון הכללי כי

$$u(x, t) = -e^{-\frac{4\pi^2 kt}{4\pi^2}} \sin x + e^{-\frac{64\pi^2 kt}{4\pi^2}} \sin(4x) = e^{-16kt} \sin(4x) - e^{-kt} \sin x$$

2. ניקח את

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

בקטע $[0, \pi]$.

כאן $L = \pi$ ולכן הפונקציות העצמיות הן $\sin(nx)$, $n = 1, 2, \dots$. נחשב

$$A_n = \frac{\int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx}{\int_0^\pi \sin^2(nx) dx} = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - x) \sin(nx) dx \right) = \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2}$$

כלומר,

$$A_n = \begin{cases} 0 & n = 2m, \quad m = 1, 2, \dots \\ \frac{4(-1)^{m+1}}{\pi(2m-1)^2} & n = 2m-1, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

לכן לפי צורת הפתרון הכללי,

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{m+1}}{\pi(2m-1)^2} e^{-(2m-1)^2 kt} \sin((2m-1)x) \quad (8)$$

הפתרון שקיבלנו הוא אמיתי. כדי להוכיח זאת, יש להראות כי $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$.

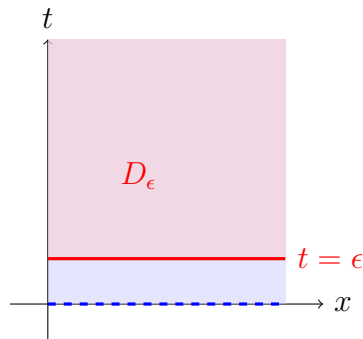
כדי להראות כי u רציפה ב- $\overline{D}$, נשים לב שהאיבר הכללי בטור במשוואה (8) חסום על ידי $\frac{4}{\pi(2m-1)^2}$, והטור $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)^2}$ מתכנס.

לכן טור הפונקציה אשר מגדיר את u מתכנס במידה שווה בכל $\overline{D}$ לפי מבחן ה- M של וירשטראס. לכן לפי משפט הרציפות, $u \in C(\overline{D})$.

זה קצת יותר עדין להראות כי u גזירה ברציפות פעמיים ב- D . אין חסם בכל D עבור טורי הנגזרות החלקיות של הטור במשוואה (8) שהוא טור מספרים מתכנס (נסו!).

במקום זאת, נראה כי $u \in C^2(D_\epsilon)$ לכל $\epsilon > 0$, כאשר

$$D_\epsilon = D \cap \{t \geq \epsilon\} = \{(x, t) \mid 0 < x < \pi, t \geq \epsilon\}$$



מכך נובע כי $u \in C^2(D)$, כי קיום ורציפות של נגזרות חלקיות בקבוצה הפתוחה הן תכונות נקודתיות: אם זה מתקיים בכל נקודה של D , אז סיימנו.

ואכן, כל אחת מהנגזרות החלקיות עד סדר שני (ולמעשה, עד כל סדר!) חסומה ב- D_ϵ על ידי ביטוי מהצורה $\frac{4k^l}{\pi} (2m-1)^j e^{-(2m-1)^2 k \epsilon}$, וזה יוצר טור מתכנס (למשל, לפי מבחן השורש).

לכן שוב לפי מבחן ה- M של וירשטראס ביחד עם משפט הגזירה איבר איבר ומשפט הרציפות, סיימנו.

מעניין לציין שלמעשה נובע כי $u \in C^\infty(D) \cap C(\bar{D})$, כלומר גזירות מכל סדר.

תנאים לפתרון אמיתי

אנו צריכים לבדוק שמתקיימים התנאים הבאים על מנת שהפתרון לבעיה אשר נתונה על ידי (3) ו-(4) יהיה אמיתי.

1. בתחום D , u רציפה וכן u_t, u_{xx} קיימות ורציפות.

2. ב- $\bar{D}$, u רציפה. בנוסף, אם u_x מופיעה בתנאי השפה, אז היא צריכה להיות קיימת ורציפה.

נציין שההגדרה המקובלת של פתרון אמיתי במקרה זה היא $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ או $u \in C^1(\bar{D})$ אם u_x מופיע בתנאי השפה, אבל בקורס זה נסכים לבדוק רק את הנגזרות החלקיות אשר מופיעות בפועל בבעיה.

כדי להוכיח שהפתרון אמיתי, כמו שראינו בעבר, כותבים את הטורים המתקבלים מגזירה איבר איבר של כל הנגזרות החלקיות שצריך לבדוק (כולל כל הנגזרות החלקיות "בדרך", למשל עבור u_{xx} נכתוב גם את u_x) ובודקים אם יש התכנסות במידה שווה בעזרת מבחן ה- M של וירשטראס.

הערה: אם מבחן וירשטראס נכשל, זה לא אומר שאין התכנסות במידה שווה ובוודאי שלא אומר שסכום הטור אינו רציף, או אינו גזיר ברציפות, וכו'.

לכן כדי להוכיח שהפתרון אינו אמיתי, הדרך הפרקטית היחידה היא למצוא סתירה בבעיה עצמה (כלומר, למצוא שלא מתקיימים תנאי תאימות). לצורך זה, לא צריך אפילו למצוא פתרון.

משפט 4: נניח כי $f(x)$ רציפה בקטע $[0, L]$, גזירה למקוטעין כך ש- $f'(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[0, L]$, וכן

$$f(0) = f(L) = 0$$

אז הפתרון (7) של בעיית דיריכלה ההומוגנית (6) הוא אמיתי, ובנוסף $u \in C^\infty(D)$.

ניתן גם לבדוק שמספיק כי $f(x)$ תהיה רציפה למקוטעין על מנת שהפתרון (7) שקיבלנו בהפרדת משתנים יהיה C^∞ עבור $t > 0$.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. השיטה של אינטגרל אנרגיה להוכחת יחידות.
2. התמרת פורייה ותכונות בסיסיות שלה.
3. פילוג גאומטרי בהסתברות.

“

Primary causes are unknown to us; but are subject to simple and constant laws, which may be discovered by observation, the study of them being the object of natural philosophy.

Heat, like gravity, penetrates every substance of the universe, its rays occupy all parts of space. The object of our work is to set forth the mathematical laws which this element obeys. The theory of heat will hereafter form one of the most important branches of general physics.

”

Joseph Fourier