

הרצאה 11: פתרון יסודי של משוואת לפלס, פונקציות גרין

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	משוואת לפלס (המשך)
2	1.1	פתרונות יסודיים של משוואת לפלס
4	1.2	פונקציות גרין
7	1.3	פונקצית גרין עבור עיגול



$$G_{x>t}(x, t)$$

$$G_{x<t}(x, t)$$

תזכורות

זהות גרין השנייה:

$$\iint_D (v \Delta u - u \Delta v) \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \left(v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} \right) \, ds \quad (1)$$

התכונה של גבול של ממוצעים: אם u רציפה בנקודה (x_0, y_0) אז

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{2\pi r} \oint_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2} u \, ds = u(x_0, y_0) \quad (2)$$

בעית דיריכלה:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial D \end{cases} \quad (3)$$

נוסחת פואסון בקואורדינטות קרטזיות:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \int_{s^2 + t^2 = R^2} f(s, t) \frac{R^2 - x^2 - y^2}{(x-s)^2 + (y-t)^2} \, d\ell(s, t) \quad (4)$$

1 משוואת לפלס (המשך)

1.1 פתרונות יסודיים של משוואת לפלס

הפתרון הרדיאלי של משוואת לפלס

ראינו כבר שהפונקציה

$$u(x, y) = \ln r = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

היא פונקציה הרמונית בתחום $\{(x, y) \neq (0, 0)\}$.

למעשה, ראינו שהפונקציות ההרמוניות אשר לא תלויות ב- θ אלא רק ב- r הן בדיוק $A + B \ln r$.

הפונקציה $u(x, y)$ הנ"ל היא "סינגולרית" בראשית. לא קשה לשנות אותה מעט ולקבל פונקציה הרמונית עם "סינגולריות" בנקודה כללית כלשהי:

הגדרה: לכל $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ נגדיר

$$\Gamma(x, y; s, t) = \frac{1}{4\pi} \ln((x-s)^2 + (y-t)^2), \quad (x, y) \neq (s, t) \quad (5)$$

הנרמול $\frac{1}{4\pi}$ נבחר על מנת שיתקיים המשפט הבא.

משפט 1: נניח כי $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום חסום עם שפה חלקה למקוטעין. תהי $u \in C^2(\overline{D})$. אז לכל $(s, t) \in D$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} u(s, t) = & \iint_D \Delta u(x, y) \Gamma(x, y; s, t) \, dx \, dy \\ & + \int_{\partial D} \left(u(x, y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \hat{n}}(x, y; s, t) - \Gamma(x, y; s, t) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(x, y) \right) \, d\ell \end{aligned} \quad (6)$$

כאשר $\hat{n} = \hat{n}(x, y)$ הוא וקטור יחידה בכיוון נורמל חיצוני לשפה ∂D , והאינטגרל הקווי על השפה הוא לפי המשתנים x, y .

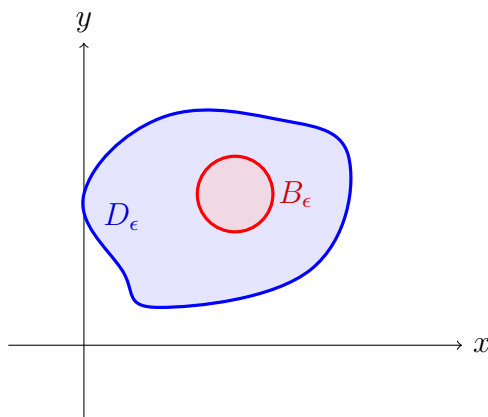
כלומר, ניתן לשחזר את u מתוך ערכי הלפליסיאן שלה בתחום ונתוני קושי שלה על שפת התחום.

הערה: אנחנו נראה בהוכחה שהתנאי $u \in C^2(\overline{D})$ נחוץ על מנת שהלפליסיאן Δu יהיה אינטגרבילי ליד השפה ∂D .

אם זה ידוע בגלל שיקול אחר, כמו למשל ובשימוש עיקרי עבורנו אם u הרמונית ב- D : $\Delta u = 0$, אז מספיק שיתקיים $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$.

לשוויון (6) אין חשיבות פרקטית מבחינת פתרון בעית דיריכלה או בעית נוימן: עבור בעית דיריכלה חסר מידע על $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$ כדי להשתמש בשוויון ולשחזר את u . ובאמת, ראינו למשל שלבעית דיריכלה עבור משוואת לפלס בתחום חסום יש פתרון יחיד, ולכן לא נכון לציין בו זמנית את u ואת $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$ בבעית קושי.

מצד שני, אנחנו נראה בקרוב ששוויון זה שימושי כדי להבין תכונות של u , ובנוסף לאחר מניפולציה יאפשר בכל זאת למצוא פתרונות של בעיות דיריכלה.



הגדרה של פתרון יסודי (העשרה)

אם ידוע כי u מתאפסת מחוץ לעיגול כלשהו B , אז נוכל לקחת $D = B$ בנוסחת הייצוג (6) ולקבל

$$u(s, t) = \iint_B \Delta u(x, y) \Gamma(x, y; s, t) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \Delta u(x, y) \Gamma(x, y; s, t) dx dy$$

לשוויון זה יש משמעות חשובה. נסמן $F(x, y) = \Delta u(x, y)$. אז הפונקציה

$$u(s, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) \Gamma(x, y; s, t) dx dy$$

מקיימת

$$u_{ss} + u_{tt} = F(s, t)$$

כלומר, ניתן למצוא כך פתרון פרטי של משוואת לפלס האי הומוגנית ("משוואת פואסון") $\Delta u = F$.

הגדרה: פונקציה $S(x, y)$ מכונה פתרון יסודי של משוואת לפלס בתחום D עם סינגולריות בנקודה $(s, t) \in D$ אם מתקיימים שני התנאים הבאים.

1. הפונקציה $S(x, y)$ הרמונית בתחום $\{(x, y) \in D \mid (x, y) \neq (s, t)\}$.
2. לכל פונקציה $u \in C^2(\mathbb{D})$ אשר מתאפסת מחוץ לאיזושהי תת קבוצה קומפקטית של D מתקיים כי

$$u(s, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Delta u(x, y) S(x, y) dx dy$$

כדי להבין יותר טוב את המשמעות של פתרון יסודי, נשתמש באופן סימבולי בלבד בזהות גרין השנייה (1) אשר כעת באגף ימין שלה כתוב 0. זה אסור, כי לא ידוע שהפונקציה $S(x, y)$ אפילו רציפה בנקודה (s, t) (ובאמת, לא יתכן שהיא רציפה). אבל זה יעזור לאינטואיציה. נקבל:

$$u(s, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} u(x, y) \Delta S(x, y) dx dy$$

על פניו, זה אומר שמתקיים $u(s, t) = 0$ שכן $\Delta S(x, y) = 0$ בכמעט כל נקודה. אבל u היא פונקציה די כללית, שבוודאי לא חייבת להתאפס בנקודה (s, t) .

המשמעות הנכונה יותר היא שהלפליסיאן ΔS הוא **דלתא של דיראק**¹ בנקודה (s, t) :

$$\Delta S = \delta_{(s, t)}$$

זו לא פונקציה מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$ כרגיל, ולא נתעמק בזה מדי, אבל זו דרך טובה להבין את ההגדרה.

הוספת פונקציה הרמונית לפתרון היסודי

הוספה של פונקציה הרמונית ל- $\Gamma(x, y; s, t)$ שומר על נוסחת הייצוג. זה יהיה חשוב במיוחד.

משפט 2: יהי D תחום חסום עם שפה חלקה למקוטעין. תהי $u_0(x, y; s, t)$ הרמונית ב- D לכל $(s, t) \in D$ ורציפה ב- $\overline{D}$. אז

$$\tilde{\Gamma}(x, y; s, t) = \Gamma(x, y; s, t) + u_0(x, y; s, t)$$

גם מקיימת את נוסחה הייצוג (6), כלומר לכל $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ ו- $(s, t) \in D$ מתקיים כי

$$u(s, t) = \iint_D \Delta u(x, y) \tilde{\Gamma}(x, y; s, t) dx dy + \int_{\partial D} \left(u(x, y) \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \hat{n}}(x, y; s, t) - \tilde{\Gamma}(x, y; s, t) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(x, y) \right) d\ell \quad (7)$$

נסו להוכיח את המשפט בעזרת זהויות גרין.

1.2 פונקציות גרין

הגדרה של פונקציות גרין

נזכיר כי החיסרון של נוסחת הייצוג (6) עבור Γ הוא שבבעיית דיריכלה איננו יודעים את ערכי $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$ על השפה ∂D .

¹אנו מפצירים בכם לא לומר פונקציה דלתא.

בהסתכלות על נוסחת הייצוג (7) עבור $\tilde{\Gamma} = \Gamma + u_0$, המוטיבציה להגדרה הבאה היא ברורה.

הגדרה: יהי $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום. נאמר כי

$$G(x, y; s, t) = \Gamma(x, y; s, t) + u_0(x, y; s, t)$$

היא פונקציית גרין עבור התחום D אם

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & (x, y) \in D \\ u_0(x, y; s, t) = -\Gamma(x, y; s, t) & (x, y) \in \partial D \end{cases}$$

לכל $(s, t) \in D$.

כלומר, כדי למצוא פונקציית גרין יש לפתור בעיית דיריכלה עם פרמטרים s, t :

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & (x, y) \in D \\ u_0(x, y; s, t) = -\frac{1}{4\pi} \ln((x-s)^2 + (y-t)^2) & (x, y) \in \partial D \end{cases}$$

באופן כללי, זה לא אפשרי טכנית. עבור תחומים שיש להם סימטריה מסוימת, ניתן למצוא את פונקציית גרין בעזרת שיטת הדמויות שנכיר בקרוב.

תכונה יסודית של פונקציית גרין

מסקנה 3: יהי D תחום חסום בעל שפה חלקה למקוטעין ותהי $G(x, y; s, t)$ פונקציית גרין עבור D . אז לכל $u \in C^2(\overline{D})$ מתקיים כי

$$u(s, t) = \iint_D \Delta u(x, y) G(x, y; s, t) dx dy + \int_{\partial D} u(x, y) \frac{\partial G}{\partial \hat{n}}(x, y; s, t) d\ell \quad (8)$$

בפרט, הפתרון היחיד של בעיית דיריכלה (3) אם ידוע כי תנאי השפה גזיר ברציפות נתון על ידי

$$u(s, t) = \int_{\partial D} f(x, y) \frac{\partial G}{\partial \hat{n}}(x, y; s, t) d\ell \quad (9)$$

הערות:

- כפי שכבר אמרנו, מספיק שיתקיים כי $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ וכן שהלפלסיאן Δu יהיה אינטגרבילי ליד השפה ∂D .
- באופן כללי יותר, הביטוי באגף ימין בשוויון (8) נותן באותו אופן פתרון עבור בעיית דיריכלה למשוואת לפלס אי הומוגנית.
- אם D אינו חסום, אז המסקנה ולכן נוסחאות (8) ו-(9) לא הוכחה. בכל זאת, בדרך כלל נוסחאות אלו נותנות פתרון פרטי עבור בעיית דיריכלה. חשוב לזכור במקרה כזה:
 1. יש להוכיח שזה אכן עובד במקרים אלו ולא להישען על המסקנה.
 2. לא מובטחת יחידות ולכן יתכנו פתרונות אחרים.

עיקרון השיקוף

כפי שכבר אמרנו, קשה למצוא פונקציה גרין באופן כללי. לכל נקודה $Q = (s, t) \in D$ יש לפתור את בעיית דיריכלה

$$\begin{cases} \Delta u_0(P; Q) = 0 & P \in D \\ u_0(P; Q) = -\Gamma(P; Q) & P \in \partial D \end{cases} \quad (10)$$

הנקודה המשתנה (x, y) סומנה על ידי Q כי זה יעזור בהבנת העיקרון שנתאר כעת.

עיקרון השיקוף עובד כך: $\Gamma(P; Q)$ תלוי רק במרחק $|Q - P|$.

נקבע $Q \in D$. אם קיימת $Q^* \notin \bar{D}$ שיש לה את התכונה

$$|Q - P| = |Q^* - P|, \quad \forall P \in \partial D \quad (11)$$

אז $u_0(P; Q) = -\Gamma(P; Q^*)$ פותרת את בעיית דיריכלה (10).

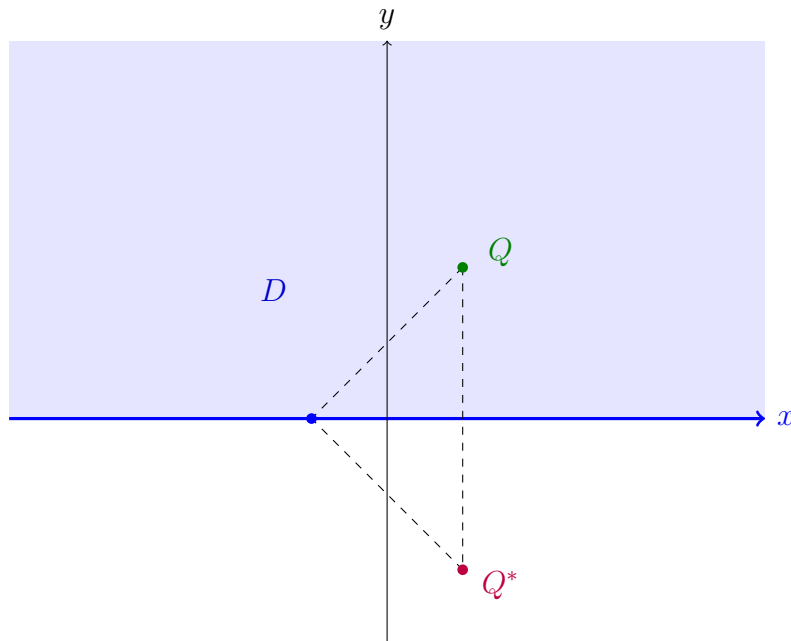
ובאמת, מכיוון ש- $Q^* \notin \bar{D}$ נקבל בכך פונקציה הרמונית בכל $\bar{D}$ ובפרט רציפה ב- $\bar{D}$.

דוגמה: ניקח בתור דוגמה את חצי המישור העליון

$$D = \{(x, y) \mid y > 0\}$$

נקבע נקודה $Q = (s, t) \in D$, כלומר $t > 0$. קל למצוא נקודה מחוץ ל- $\bar{D}$, כלומר בחצי המישור התחתון, אשר לכל נקודת שפה P מקיימת את התנאי (11): שיקוף ביחס לשפה. כלומר,

$$Q^* = (s, -t)$$



לכן נקבל

$$u_0(x, y; s, t) = -\frac{1}{4\pi} \ln((x-s)^2 + (y+t)^2)$$

ולכן נקבל פונקציית גרין

$$G(x, y; s, t) = \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{(x-s)^2 + (y-t)^2}{(x-s)^2 + (y+t)^2} \right) \quad (12)$$

התחום D אינו חסום ולכן הנוסחאות (8) ו-(9) לאו דווקא תקפות. בכל זאת, מתברר ש-(9) מהווה פתרון פרטי לבעיית דיריכלה.

1.3 פונקציית גרין עבור עיגול

שיטת הדמויות

באופן כללי יותר, לאו דווקא קיימת "דמות" Q^* אשר מקיימת את התנאי (11). למשל, עבור עיגול, לא קשה להשתכנע שאין.

במקרים כאלו, הכל עדיין לא אבוד. אפשר לחפש דמות Q^* מחוץ ל- $\bar{D}$ שמקיימת תנאי כללי יותר מהסוג

$$|Q - P| = \alpha(Q) |Q^* - P|, \quad \forall P \in \partial D \quad (13)$$

כאשר $\alpha(Q)$ פונקציה שתלויה רק ב- Q . במקרה כזה, לפי כלל השרשרת, הפונקציה

$$u_0(P; Q) = -\Gamma(\alpha(Q)P; \alpha(Q)Q^*)$$

היא פתרון של בעיית דיריכלה (10).

עיקרון השיקוף לא בדיוק עובד כדי למצוא את Q^* , אלא יש לחפש נקודת אינוורסיה ביחס לשפה. נדגים עבור עיגול היחידה.

דוגמה: יש פעולה שטבעי לכתוב אותה באופן מרוכב אשר מבטאת היפוך ביחס למעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$.

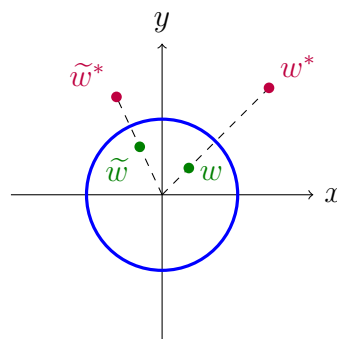
ניקח $w = s + it$ כאשר $0 < s^2 + t^2 < 1$.

נקודת האינוורסיה w^* היא הנקודה הנמצאת על אותה קרן כמו w ובנוסף מקיימת $|w| |w^*| = 1$.

אפשר לכתוב את שני התנאים באופן מרוכב: $w \bar{w}^* = 1$ (הארגומנט באגף ימין הוא 0, ולכן הארגומנטים של w, w^* שווים). לכן מדובר בנקודה

$$w^* = \frac{1}{\bar{w}} = \frac{w}{w\bar{w}} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{s}{s^2 + t^2} + i \frac{t}{s^2 + t^2} \quad (14)$$

היא מכונה נקודת אינוורסיה של w ביחס למעגל היחידה.



פונקצית גרין עבור עיגול

באופן כללי יותר, נקודת האינורסיה של $w = s + it$ אשר מקיימת $0 < s^2 + t^2 < R^2$ ביחס למעגל $x^2 + y^2 = R^2$ היא הנקודה המקיימת את התנאי

$$w\overline{w^*} = R^2$$

כלומר, מדובר בנקודה

$$w^* = \frac{R^2}{\overline{w}} = \frac{R^2 w}{w\overline{w}} = \frac{R^2 w}{|w|^2} = \frac{R^2 s}{s^2 + t^2} + i \frac{R^2 t}{s^2 + t^2} \quad (15)$$

נראה כעת שפתרנו את הבעיה של למצוא דמות המקיימת (13) לכל $Q \equiv w \neq 0$.

ואכן, נניח כי $P \equiv z = x + iy$ נמצאת על השפה: $|z| = R$. אז

$$|w^* - z|^2 = \left(\frac{R^2 w}{|w|^2} - z \right) \left(\overline{\frac{R^2 w}{|w|^2} - z} \right) = \frac{R^2}{|w|^2} |w - z|^2$$

לכן עבור $0 < s^2 + t^2 < R^2$,

$$\begin{aligned} u_0(x, y; s, t) &= -\Gamma \left(\underbrace{\frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{R} x, \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{R} y}_{\alpha(Q)P}; \underbrace{\frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{R} \cdot \frac{R^2 s}{s^2 + t^2}, \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{R} \cdot \frac{R^2 t}{s^2 + t^2}}_{\alpha(Q)Q^*} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \ln \left(\underbrace{\frac{s^2 + t^2}{R^2}}_{\alpha(Q)^2} \underbrace{\left(\left(x - \frac{R^2 s}{s^2 + t^2} \right)^2 + \left(y - \frac{R^2 t}{s^2 + t^2} \right)^2 \right)}_{|Q^* - P|^2} \right) \end{aligned}$$

היא פונקציה הרמונית לפי המשתנים x, y אשר מקיימת את תנאי השפה של הבעיה (10).

לבסוף, עבור $s = t = 0$, כלומר $Q = (0, 0)$, קל מאוד למצוא פתרון עבור בעיה דיריכלה (10) של u_0 . ואכן, במקרה $Q = 0$, לכל $P \in \partial D$ מתקיים כי $|Q - P| = R$ ולכן

$$\Gamma(P; Q) = \frac{1}{4\pi} \ln(R^2)$$

כלומר, Γ קבועה על השפה. לכן אפשר לבחור פונקציה קבועה

$$u_0(x, y; 0, 0) = -\frac{1}{4\pi} \ln(R^2)$$

בסך הכל, מצאנו פתרון עבור בעיית דיריכלה (10) של u_0 :

$$u_0(x, y; s, t) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{s^2 + t^2}{R^2} \left(\left(x - \frac{R^2 s}{s^2 + t^2} \right)^2 + \left(y - \frac{R^2 t}{s^2 + t^2} \right)^2 \right) \right) & 0 < s^2 + t^2 < R^2 \\ -\frac{1}{4\pi} \ln(R^2) & s = t = 0 \end{cases}$$

מכאן נקבל פונקצית גרין עבור העיגול $x^2 + y^2 < R^2$:

$$G(x, y; s, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{(x-s)^2 + (y-t)^2}{\frac{s^2+t^2}{R^2} \left(\left(x - \frac{R^2 s}{s^2+t^2}\right)^2 + \left(y - \frac{R^2 t}{s^2+t^2}\right)^2 \right)} \right) & 0 < s^2 + t^2 < R^2 \\ \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) & s = t = 0 \end{cases} \quad (16)$$

בסימונים מקוצרים יותר $P = (x, y)$ ו- $Q = (s, t)$:

$$G(P; Q) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{R|Q-P|}{|Q||Q^*-P|} \right) & 0 < |Q| < R \\ \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|P|}{R} \right) & Q = 0 \end{cases} \quad (17)$$

הערה: שיטת הדמויות בהשראת (13) תעבוד לרוב במקרים שלתחום יש מושג של אינוורסיה ביחס לשפה אשר מעבירה נקודות פנימיות לנקודות חיצוניות (ולהפך).

נוסחת פואסון וגרעין פואסון

פונקצית גרין (16) וייצוג הפתרון בעזרת פונקצית גרין (9) יתנו לנו כעת:

מסקנה 4: הפתרון היחיד של בעיית דיריכלה

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 < R^2 \\ u(x, y) = f(x, y) & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

כאשר $f \in C^1(\partial D)$ נתון על ידי

$$u(s, t) = \frac{1}{2\pi R} \int_{x^2+y^2=R^2} f(x, y) \frac{R^2 - s^2 - t^2}{(x-s)^2 + (y-t)^2} d\ell$$

זו בדיוק נוסחת פואסון (4) במקרה הפרטי שידוע כי תנאי השפה גזיר ברציפות. אנחנו כמובן כבר יודעים שמספיק שהוא יהיה רציף.

באופן כללי, הביטוי (9) עבור פתרון בעיית דיריכלה מכונה **נוסחת פואסון** עבור התחום D , והפונקציה

$$K(x, y; s, t) = \frac{\partial G}{\partial \hat{n}}(x, y; s, t) \quad (18)$$

מכונה **גרעין פואסון** של התחום D .

זה אכן נובע על ידי חישוב של $\frac{\partial G}{\partial \hat{n}}$ בנקודות שפה (x, y) כאשר

$$\hat{n} = \hat{r} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{R}(x, y)$$

בעזרת משפט על נגזרת מכוונת:

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{n}} = \vec{\nabla} G \cdot \hat{n} = \frac{1}{R} \left(x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} \right)$$

לא נפרט את החישוב.

תכונות של פונקציית גרין ושל גרעין פואסון

המשפט הבא נכון לכל תחום חסום עבורו קיימת פונקציית גרין. לא נוכיח אותו.

משפט 5: נניח כי D הוא תחום חסום שקיימת עבורו פונקציית גרין $G(x, y; s, t)$.

1. פונקציית גרין עבור D היא יחידה.

2. פונקציית גרין עבור D היא סימטרית, כלומר לכל שתי נקודות שונות $(x, y), (s, t) \in D$ מתקיים כי

$$G(x, y; s, t) = G(s, t; x, y)$$

3. גרעין פואסון $K(x, y; s, t)$ הוא הרמוני עבור $(x, y) \neq (s, t)$.

4. לכל $(s, t) \in D$ מתקיים כי

$$\oint_{\partial D} K(x, y; s, t) d\ell = 1$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. תנאים לקיצון עבור פונקציה במספר משתנים (התאפסות הגרדיאנט, מוגדרות מטריצת ההסיאן).
2. משפט ההתכנסות במידה שווה עבור טור פורייה, טור סינוסים וטור קוסינוסים (מאנליזה הרמונית).

“ When you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you know something about it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meager and unsatisfactory kind; it may be the beginning of knowledge, but you have scarcely, in your thoughts advanced to the stage of science.

”

Lord Kelvin