

הרצאה 10: עיקרון המקסימום החלש ומסקנות ממנו, הפרדת משתנים במלבן

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

3	1 משוואת לפלס (המשך)
3	1.1 עיקרון המקסימום החלש
5	1.2 הפרדת משתנים במלבן

Applying separation of variables

To solve an ODE

To solve a PDE



תזכורות

בעיית דיריכלה כללית בעיגול בעל רדיוס $R > 0$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < R^2, \\ u(x, y) = f(x, y), & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \quad (1)$$

מגדירים $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ וכן $h(\theta) = f(R \cos \theta, R \sin \theta)$ (מעבר לקואורדינטות פולריות).

משפט 1: נניח כי h רציפה ומקיימת $h(-\pi) = h(\pi)$, וכן h' רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$. נסמן ב- a_n, b_n את מקדמי פורייה הממשיים הקלאסיים של h בקטע $[-\pi, \pi]$. אז

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

פתרון אמיתי יחיד של הבעיה

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0 & 0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi \\ v(R, \theta) = h(\theta) & -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

עוד לא הוכחנו את משפט 1.

משפט 2: נניח כי h רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$. נסמן ב- a_n, b_n את מקדמי פורייה הממשיים הקלאסיים של h בקטע $[-\pi, \pi]$. אז טור הפונקציות

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

מתכנס נקודתית עבור $0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi$, ובנוסף

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi, \quad 0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (2)$$

משפט 3: נניח כי f רציפה על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$. אז הפתרון היחיד של בעיית דיריכלה (1) נתון על ידי

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \int_{s^2+t^2=R^2} f(s, t) \frac{R^2 - x^2 - y^2}{(x-s)^2 + (y-t)^2} d\ell \quad (3)$$

בתוך העיגול, ועל ידי $u = f$ על השפה.

עוד לא הוכחנו את משפט 3, כי עוד לא הראינו שהפונקציה $u(x, y)$ רציפה בעיגול הסגור.

למה 4: נניח כי f רציפה על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$. אז הפונקציה הנתונה על ידי נוסחת פואסון (3) היא בעלת גזרות חלקיות מכל סדר והרמונית בתוך העיגול.

1 משוואת לפלס (המשך)

1.1 עיקרון המקסימום החלש

ניסוח עיקרון המקסימום החלש

התכונה הבאה היא תכונה שלפעמים מתקיימת גם עבור פתרונות של מד"ח אחרות. היא מכונה **עיקרון המקסימום החלש**.

כלומר, עיקרון המקסימום החלש אינו ייחודי לפונקציות הרמוניות. עיקרון הממוצע, מנגד, מאוד ייחודי לפונקציות הרמוניות.

משפט 5: יהי $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום חסום ותהי $u(x, y)$ הרמונית ב- D ורציפה ב- $\bar{D}$. אז מקבל מקסימום ב- $\bar{D}$ על השפה, ∂D .

הערות:

- לפי משפט וירשטראס, תחת התנאים בעיקרון המקסימום החלש מתקיים ש- $u(x, y)$ מקבלת מקסימום ב- $\bar{D}$ (פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה). עיקרון המקסימום החלש אומר שהמקסימום מתקבל על השפה.

- עיקרון המקסימום החלש לא אומר שהמקסימום מתקבל רק על השפה. כלומר, יתכן שאותו ערך מקסימלי מתקבל גם בפנים. למשל, $u(x, y) \equiv 1$.

אנו יודעים מעיקרון המקסימום החזק שאם המקסימום מתקבל בפנים, אז $u(x, y)$ פונקציה קבועה. כלומר, במקרה של D חסום ו- $u \in C(\bar{D})$, עיקרון המקסימום החזק הוא אכן חיזוק של עיקרון המקסימום החלש: המקסימום מתקבל **רק** על ∂D אלא אם u קבועה.

- לסיכום אפשר לכתוב את מסקנת עיקרון המקסימום החלש כך: $\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u$.

- הכל נכון כמובן גם עם מינימום במקום מקסימום, כי אם u הרמונית אז $-u$ גם הרמונית.

כלומר, $\min_{\bar{D}} u = \min_{\partial D} u$. לכן גם

$$\max_{\bar{D}} |u| = \max_{\partial D} |u| \quad (4)$$

נשווה לעיקרון המקסימום החזק:

1. התחום D חייב להיות חסום.

2. הפונקציה u חייבת להיות מוגדרת על ∂D ורציפה על $\bar{D}$.

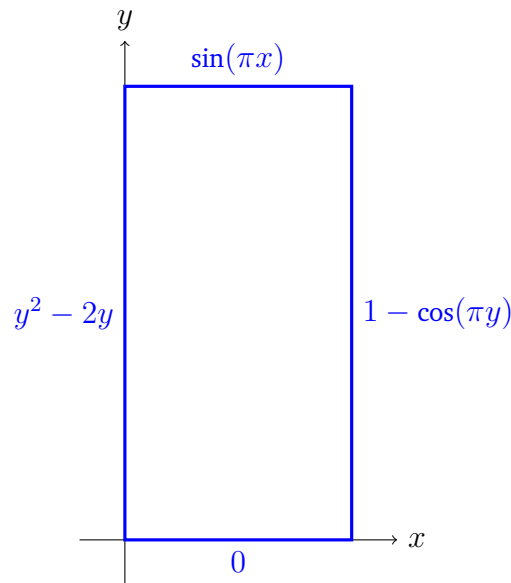
דוגמאות לשימוש במשפט ולכך שלא ניתן לוותר על דרישת חסימות התחום

דוגמאות:

1. נתונה בעיית דיריכלה במלבן:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) = y^2 - 2y, \quad u(1, y) = 1 - \cos(\pi y), & 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

נמצא את הערך המקסימלי של פתרון במלבן (אם קיים כזה פתרון).



בעתיד נראה כיצד למצוא את הפתרון $u(x, y)$ באמצעות הפרדת משתנים. אנחנו לא נזדקק לזה, מכיוון שעל פי עיקרון המקסימום החלש, המקסימום מתקבל בשפה. לכן נמצא את המקסימום על השפה וזה יהיה המקסימום בכל המלבן (במקום להיות רק קטן או שווה למקסימום במלבן כמו לכל פונקציה).

המקסימום במקטע השמאלי של השפה הוא 0, בימני 2, בתחתון 0 ובעליון 1. לכן

$$\max \{u(x, y) \mid (x, y) \text{ במלבן} \} = 2$$

באופן דומה, $\min u = -1$, וכן $\max |u| = 2$ (במלבן).

2. הפונקציה $u(x, y) = 1 + \ln(x^2 + y^2)$ היא הרמונית עבור $x^2 + y^2 \geq 1$ אבל לא מקבלת מקסימום כלל (היא לא חסומה מלמעלה).

זה לא מהווה סתירה לעיקרון המקסימום החלש היות שמדובר בתחום שאינו חסום.

יחידות ויציבות עבור בעיית דיריכלה

מסקנה 6: יהי $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום חסום. אז לבעיית דיריכלה ב- D

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial D \end{cases}$$

יש פתרון אחד לכל היותר, והיא יציבה.

כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל שתי פונקציות $f_1, f_2 \in C(\partial D)$ אשר מקיימות

$$\forall (x, y) \in \partial D \quad |f_2(x, y) - f_1(x, y)| < \delta$$

מתקיים כי לכל שני פתרונות

$$\begin{cases} \Delta u_i = 0, & (x, y) \in D, \\ u_i(x, y) = f_i(x, y), & (x, y) \in \partial D \end{cases}, (i = 1, 2)$$

$$\forall (x, y) \in D \quad |u_2(x, y) - u_1(x, y)| < \varepsilon$$

הוכחנו כבר יחידות תחת תנאים מעט יותר חזקים. הוכחת קיום היא משימה מורכבת יותר.

מסקנות מעיקרון המקסימום החלש

מסקנה 7: נניח כי $u_1, u_2, \dots$ הרמוניות בתחום חסום D ורציפות ב- $\overline{D}$. אם טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס במידה שווה על השפה ∂D , אז הוא מתכנס במידה שווה ב- $\overline{D}$. למעשה, סכום הטור בהכרח הרמוני ב- D (ולפי משפט הרציפות, רציף ב- $\overline{D}$). נוכל כעת סוף סוף להוכיח את משפטים 1 ו-3, ובכך נקבל קיום של פתרון לבעיית דיריכלה בעיגול (1).

מסקנה 8: בעיית דיריכלה בעיגול (1) היא מוצגת היטב (קיום, יחידות, יציבות).

משפט 9: תהי $u(x, y)$ הרמונית בתחום D . אז $u \in C^\infty(D)$.

כלומר, לכל פונקציה הרמונית יש נגזרות חלקיות מכל סדר.

בהיכרות ראשונה זה מוזר ולא אמין. פונקציה נקראת הרמונית אם $u \in C^2(D)$ וכן $u_{xx} + u_{yy} = 0$. מאיפה פתאום קיימות נגזרות חלקיות נוספות כמו u_{xxx} ?

למעשה, ניתן לומר אף יותר: כל פונקציה הרמונית ניתנת לפיתוח לטור חזקות. פונקציה כזו מכונה **אנליטית**, וההוכחה של התכונה החזקה הזו ניתנת בדרך כלל בקורס בפונקציות מרוכבות. אנחנו נוכיח את משפט 9.

1.2 הפרדת משתנים במלבן

תיאור השיטה עבור בעיית דיריכלה

נתונה בעיית דיריכלה במלבן

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & a < x < b, \quad c < y < d \\ u(a, y) = \alpha(y) & c \leq y \leq d \\ u(b, y) = \beta(y) & c \leq y \leq d \\ u(x, c) = \gamma(x) & a \leq x \leq b \\ u(x, d) = \delta(x) & a \leq x \leq b \end{cases}$$

כדי שיהיה פתרון אמיתי, הערכים בפינויות חייבים להיות קונסיסטנטים. כלומר,

$$\begin{cases} \alpha(c) = u(a, c) = \gamma(a) \\ \alpha(d) = u(a, d) = \delta(a) \\ \beta(c) = u(b, c) = \gamma(b) \\ \beta(d) = u(b, d) = \delta(b) \end{cases}$$

בנוסף, כדי שהשיטה שנתאר מיד תעבוד, הערכים בפינויות צריכים להיות 0. אם לא, נראה אחר כך איך עושים תיקון.

לא ניתן להשתמש בהפרדת משתנים ישירות על הבעיה כי לא נקבל תנאי שפה של בעיית שטורם ליוביל. הסיבה היא שאין זוג תנאי שפה אשר שווים לאפס.

כדי לפתור את הבעיה, נפצל לשתי בעיות ונצל את עיקרון הסופרפוזיציה.

בעיית הקווים האופקיים היא הבעיה המתקבלת מאיפוס תנאי השפה האנכיים:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & a < x < b, c < y < d \\ u(a, y) = u(b, y) = 0 & c \leq y \leq d \\ u(x, c) = \gamma(x) & a \leq x \leq b \\ u(x, d) = \delta(x) & a \leq x \leq b \end{cases}$$

בעיית הקווים האנכיים היא הבעיה המתקבלת מאיפוס תנאי השפה האופקיים:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & a < x < b, c < y < d \\ u(a, y) = \alpha(y) & c \leq y \leq d \\ u(b, y) = \beta(y) & c \leq y \leq d \\ u(x, c) = u(x, d) = 0 & a \leq x \leq b \end{cases}$$

לפי עיקרון הסופרפוזיציה, אם u_1 פותר את בעיית הקווים האופקיים ו- u_2 פותר את בעיית הקווים האנכיים, אז $u := u_1 + u_2$ פותר את הבעיה הרצויה.

דוגמה עבור בעיית דיריכלה

דוגמה: נתונה בעיית דיריכלה במלבן

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ u(0, y) = 0 & 0 \leq y \leq 2 \\ u(1, y) = \sin(3\pi y) - 5 \sin(\pi y) & 0 \leq y \leq 2 \\ u(x, 0) = \sin(4\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 2) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

הערכים בפינויות אכן תואמים ומתאפסים:

$$\begin{cases} 0 = u(0, 0) = \sin(4\pi \cdot 0) \\ 0 = u(0, 2) = 0 \\ \sin(3\pi \cdot 0) - 5 \sin(\pi \cdot 0) = u(1, 0) = \sin(4\pi \cdot 1) \\ \sin(3\pi \cdot 2) - 5 \sin(\pi \cdot 2) = u(1, 2) = 0 \end{cases}$$

בעית הקווים האופקיים היא:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2 \\ u(0, y) = u(1, y) = 0 & 0 \leq y \leq 2 \\ u(x, 0) = \sin(4\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 2) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

בעית הקווים האנכיים היא:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2 \\ u(0, y) = 0 & 0 \leq y \leq 2 \\ u(1, y) = \sin(3\pi y) - 5 \sin(\pi y) & 0 \leq y \leq 2 \\ u(x, 0) = u(x, 2) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

פתרון בעית הקווים האופקיים: נפיק בעית שטורם ליוביל על ידי הצבת $X(x)Y(y)$ לתוך המד"ח ההומוגנית (היא במילא הומוגנית) ולתוך תנאי השפה אשר שווים לאפס:

$$\begin{cases} X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \\ X(0)Y(y) = X(1)Y(y) = 0 \end{cases}$$

לכן בעית שטורם ליוביל היא

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

ראינו בעבר שהפתרון של בעיה זו הוא

$$X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad \lambda = (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

נפתח את התנאים הנלווים לטורי פורייה לפי מערכת הפונקציות העצמיות. התנאי $u(x, 2) = 0$ הוא טור של אפסים, ו-

$$u(x, 0) = \sin(4\pi x) = X_4(x)$$

נציב פתרון

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \sin(n\pi x)$$

לתוך המד"ח ולתוך תנאי השפה.

מכיוון שהמד"ח ההומוגנית, המד"ח תפיק עבור המקדמים $a_n(y)$ את המד"ח שהתקבלה בשלב הפרדת המשתנים $-\frac{Y''}{Y} = -\lambda$ עם $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2$:

$$a_n''(y) = n^2\pi^2 a_n(y)$$

הפתרון הכללי שלה הוא

$$a_n(y) = \tilde{A}_n e^{n\pi y} + \tilde{B}_n e^{-n\pi y} = A_n \cosh(n\pi y) + B_n \sinh(n\pi y)$$

כאשר הייצוג השני נוח יותר כאשר יש תנאי עבור $y = 0$ כמו במקרה שלנו.

נציב לתוך תנאי השפה האופקי התחתון ונקבל

$$X_4(x) = u_1(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) X_n(x)$$

לכן $a_4(0) = 1$, ולכל $n \neq 4$ נקבל $a_n(0) = 0$.

נציב לתוך תנאי השפה האופקי העליון ונקבל

$$0 = u_1(x, 2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2) X_n(x)$$

לכן $a_n(2) = 0$ לכל n .

לכן אם $n \neq 4$ אז

$$\begin{cases} a_n(y) = A_n \cosh(n\pi y) + B_n \sinh(n\pi y) \\ 0 = a_n(0) = A_n \\ 0 = a_n(2) = B_n \sinh(2n\pi) \Rightarrow B_n = 0 \end{cases} \Rightarrow a_n(y) \equiv 0$$

עבור $n = 4$,

$$\begin{cases} a_4(y) = A_4 \cosh(4\pi y) + B_4 \sinh(4\pi y) \\ 1 = a_4(0) = A_4 \\ 0 = a_4(2) = \cosh(8\pi) + B_4 \sinh(8\pi) \Rightarrow B_4 = -\frac{\cosh(8\pi)}{\sinh(8\pi)} \end{cases}$$

לכן $a_4(y) = \cosh(4\pi y) - \coth(8\pi) \sinh(4\pi y)$ לכל y בסך הכל,

$$u_1(x, y) = \cosh(4\pi y) \sin(4\pi x) - \coth(8\pi) \sinh(4\pi y) \sin(4\pi x)$$

פתרון בעית הקווים האנכיים: נפיק בעית שטורם ליוביל על ידי הצבת

$X(x)Y(y)$ לתוך המד"ח ההומוגנית (היא במילא הומוגנית) ולתוך תנאי השפה אשר שווים לאפס:

$$\begin{cases} X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \\ X(x)Y(0) = X(x)Y(2) = 0 \end{cases}$$

לכן בעית שטורם ליוביל היא

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(2) = 0 \end{cases}$$

ראינו בעבר שהפתרון של בעיה זו הוא

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right), \quad \lambda = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

נפתח את התנאים הנלווים לטורי פורייה לפי מערכת הפונקציות העצמיות.
התנאי $u(0, y) = 0$ הוא טור של אפסים, ו-

$$u(1, y) = \sin(3\pi y) - 5\sin(\pi y) = Y_6(y) - 5Y_2(y)$$

נציב פתרון

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$$

לתוך המד"ח ולתוך תנאי השפה.

מכיוון שהמד"ח הומוגנית, המד"ח תפיק עבור המקדמים $b_n(x)$ את המד"ח שהתקבלה
בשלב הפרדת המשתנים $-\frac{X''}{X} = -\lambda$ עם $\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}$:

$$b_n''(x) = \frac{n^2\pi^2}{4} b_n(x)$$

הפתרון הכללי שלה הוא

$$b_n(x) = A_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

נציב לתוך תנאי השפה האנכי הימני ונקבל

$$Y_6(y) - 5Y_2(y) = u_2(1, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(1) Y_n(y)$$

לכן $b_2(1) = -5$, $b_6(1) = 1$, ולכל $n \neq 2, 6$ נקבל $b_n(1) = 0$.

נציב לתוך תנאי השפה האנכי השמאלי ונקבל

$$0 = u_2(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) Y_n(y)$$

לכן $b_n(0) = 0$ לכל n .

לכן אם $n \neq 2, 6$ אז

$$\begin{cases} b_n(x) = A_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ 0 = b_n(0) = A_n \\ 0 = b_n(1) = B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow B_n = 0 \end{cases} \Rightarrow b_n(x) \equiv 0$$

עבור $n = 2$,

$$\begin{cases} b_2(x) = A_2 \cosh(\pi x) + B_2 \sinh(\pi x) \\ 0 = b_2(0) = A_2 \\ -5 = b_2(1) = B_2 \sinh(\pi) \Rightarrow B_2 = -\frac{5}{\sinh(\pi)} \end{cases} \Rightarrow b_2(x) = -\frac{5 \sinh(\pi x)}{\sinh(\pi)}$$

עבור $n = 6$,

$$\begin{cases} b_6(x) = A_6 \cosh(3\pi x) + B_6 \sinh(3\pi x) \\ 0 = b_6(0) = A_6 \\ 1 = b_6(1) = B_6 \sinh(3\pi) \Rightarrow B_6 = \frac{1}{\sinh(3\pi)} \end{cases} \Rightarrow b_6(x) = \frac{\sinh(3\pi x)}{\sinh(3\pi)}$$

לכן בסך הכל,

$$u_2(x, y) = \frac{1}{\sinh(3\pi)} \sinh(3\pi x) \sin(3\pi y) - \frac{5}{\sinh(\pi)} \sinh(\pi x) \sin(\pi y)$$

לסיום,

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

פתרון של הבעיה המקורית הנתונה.

הערות

1. תנאי הקונסיסטנטיות בפינות, כלומר שוויון בין הביטויים השונים כאשר הם מתייחסים לאותו קודקוד של המלבן, מכונים **תנאי תאימות** עבור הבעיה.

2. בדוגמה, הפתרון הוא סכום סופי. זה קרה כי התנאים הנלווים היו צירופים לינאריים של פונקציות עצמיות של שתי הבעיות.

בפרט, הפתרון בבירור אמיתי.

3. אם יש תאימות בפינות אבל הערכים אינם 0, אז ראשית מחסירים מ- $u(x, y)$ פולינום הרמוני ממעלה 2

$$p(x, y) = axy + bx + cy + d$$

כדי לאפס את ערכי הפינות. בסוף, יש להוסיף בחזרה את הפולינום.

4. אם יש חלק אי הומוגני במד"ח, אז כרגיל מציבים את הפתרון המוצע עבור $u(x, y)$ לתוך המד"ח האי הומוגני. חשוב לעשות זאת רק עבור אחת משתי הבעיות, אחרת לפי עיקרון הסופרפוזיציה יתקבל בסוף

$$u_{xx} + u_{yy} = 2F(x, y)$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. זהות גרין השנייה.

2. דלתא של דיראק.

“ Sometimes it is the people who no one imagines anything of who do the things that no one can imagine.

”

Alan Turing