

הרצאה 9: נוסחת פואסון, עיקרון הממוצע, עיקרון המקסימום החזק

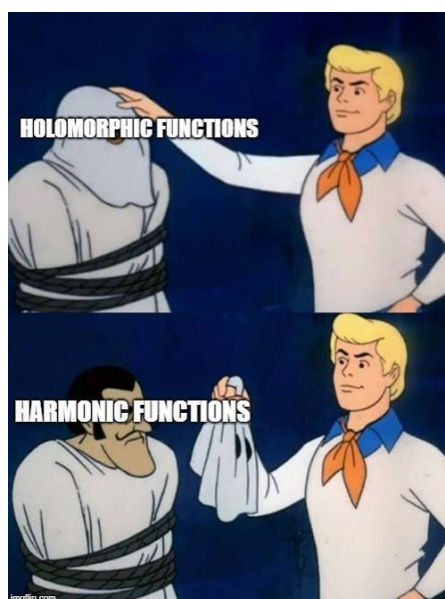
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 משוואת לפלס (המשך)
2	1.1 נוסחת פואסון
4	1.2 עיקרון הממוצע ועיקרון המקסימום החזק



תזכורות

זהות גרין הראשונה:

$$\iint_D \Delta u \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \, ds \quad (1)$$

בעיית דיריכלה כללית בעיגול בעל רדיוס $R > 0$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < R^2, \\ u(x, y) = f(x, y), & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \quad (2)$$

מגדירים $u(r, \theta) = v(r, \theta)$ וכן $h(\theta) = f(R \cos \theta, R \sin \theta)$ (מעבר לקואורדינטות פולריות).

ניסחנו את המשפט הבא, אך עוד לא הוכחנו אותו.

משפט 1: נניח כי h רציפה ומקיימת $h(-\pi) = h(\pi)$, וכן h' רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$. נסמן ב- a_n, b_n את מקדמי פורייה הממשיים הקלאסיים של h בקטע $[-\pi, \pi]$. אז

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

פתרון אמיתי יחיד של הבעיה

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0 & 0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi \\ v(R, \theta) = h(\theta) & -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

1 משוואת לפלס (המשך)

1.1 נוסחת פואסון

נוסחת פואסון בקואורדינטות קוטביות

ראינו בפעם האחרונה את הפתרון הכללי של (2) במשתנים קוטביים באמצעות הפרדת משתנים, ובשלב זה עוד לא ידוע שמדובר בפתרון אמיתי. בכל זאת, נוכל כבר להראות שהוא מתכנס בעיגול הפתוח וכן לקבל נוסחה מפתיעה עבורו:

משפט 2: נניח כי h רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$. נסמן ב- a_n, b_n את מקדמי פורייה הממשיים הקלאסיים של h בקטע $[-\pi, \pi]$. אז טור הפונקציות

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

מתכנס נקודתית עבור $0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi$, ובנוסף

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} \, d\varphi, \quad 0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (3)$$

גרעין פואסון

בכך קיבלנו נוסחה סגורה לפתרון של בעיית דיריכלה בעיגול ברדיוס R עם תנאי שפה $h(\varphi)$ מעניין במיוחד לשים לב שהערך של הפתרון $v(r, \theta)$ הוא ממוצע משוקלל של ערכי השפה $h(\varphi)$. לנוסחה הזו קוראים **נוסחת פואסון**.

הגדרה: גרעין פואסון מוגדר על ידי

$$K(R, \varphi; r, \theta) := \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} \quad (4)$$

גרעין פואסון מוגדר לפעמים ללא הגורם $\frac{1}{2\pi}$, שכמובן בכל זאת יופיע בנוסחה. באופן כללי, אם נתונה בעיית לפלס בתחום כלשהו, והצלחנו להציג את הפתרון כממוצע משוקלל של התנאים הנלווים על השפה, נקרא לנוסחה כזו נוסחת פואסון עבור התחום. הגרעין המתאים יקרא גרעין פואסון עבור אותו תחום.

נוסחאות פואסון בקואורדינטות קרטזיות

ניתן לכתוב את נוסחת פואסון ואת גרעין פואסון עבור $u(x, y)$ ישירות. כלומר, ניתן לחזור לקואורדינטות קרטזיות.

הביטוי במכנה הוא למעשה המרחק בריבוע בין שתי נקודות "טבעיות" מבחינת הבעיה:

$$\begin{aligned} d((R \cos \varphi, R \sin \varphi), (r \cos \theta, r \sin \theta))^2 \\ = |(R \cos \varphi - r \cos \theta, R \sin \varphi - r \sin \theta)|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) \end{aligned}$$

כלומר, מדובר במרחק בריבוע בין הנקודה שבה מעוניינים לחשב את u לבין נקודה כללית על השפה. זה גם אומר שנקודות שפה אשר קרובות לנקודה (x, y) משפיעות יותר על הערך $u(x, y)$ מאשר נקודות רחוקות יותר.

לכן נוסחת פואסון בקואורדינטות קרטזיות:

משפט 3: נניח כי f רציפה על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$. אז הפתרון היחיד של בעיית דיריכלה (2) נתון על ידי

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \int_{s^2+t^2=R^2} f(s, t) \frac{R^2 - x^2 - y^2}{(x-s)^2 + (y-t)^2} d\ell \quad (5)$$

בתוך העיגול, ועל ידי $u = f$ על השפה.

האינטגרל באגף ימין של (5) הוא אינטגרל קווי מסוג ראשון על הנקודות (s, t) במעגל.

כלומר, גרעין פואסון בקואורדינטות קרטזיות הוא

$$K_c(s, t; x, y) = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - x^2 - y^2}{(x-s)^2 + (y-t)^2} \quad (6)$$

הערה: המשפט, נוסחת פואסון וכן גרעין פואסון נכונים כולם וניתנים להוכחה באותו אופן עבור עיגול שמרכזו (x_0, y_0) . יש להחליף את המעגל במעגל סביב נקודה זו, וכן את x, y בביטויים $x - x_0, y - y_0$.

אינטגרל פואסון הוא הרמוני

נוכל להוכיח את משפט 3 בקרוב. בכך נקבל גם את נוסחת פואסון בקואורדינטות קוטביות (3). בשלב זה, הגענו אל הנוסחה מתוך צורת הפתרון במשפט 1, שגם אותו עוד לא הוכחנו.

בכל זאת, נוכל להוכיח כבר כעת מרכיב אחד מתוך המשפט:

למה 4: נניח כי f רציפה על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$. אז הפונקציה הנתונה על ידי נוסחת פואסון (5) היא בעלת נגזרות חלקיות מכל סדר והרמונית בתוך העיגול.

כלומר, כדי להוכיח את משפט 3 יהיה חסר עוד להראות רציפות על העיגול הסגור.

1.2 עיקרון הממוצע ועיקרון המקסימום החזק

הגדרה ודוגמאות

בסעיף הזה נתעמק בתכונות המיוחדות של פתרונות של משוואת לפלס ההומוגנית. הפתרונות הללו כל כך יוצאי דופן שיש להם שם:

הגדרה: יהי $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום ותהי $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ברציפות פעמיים. נאמר ש- $u(x, y)$ הרמונית ב- D אם $\Delta u \equiv 0$ ב- D .

כלומר, פונקציה הרמונית היא פתרון של משוואת לפלס ההומוגנית.

דוגמאות:

1. הפונקציה $u(x, y) = x$ היא הרמונית. גם הפונקציה $u(x, y) = y$, וכן $u(x, y) = x + y$. למעשה, כל פולינום ממעלה קטנה או שווה ל-1 יהיה תמיד הרמוני.

2. מתוך הפולינומים ב- x, y ממעלה 2, מי הרמוני? כלומר:

$$p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

התנאי הוא:

$$0 = p_{xx}(x, y) + p_{yy}(x, y) = 2a + 2c$$

לכן פולינום הרמוני כללי ממעלה 2:

$$p(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy + dx + ey + f$$

אפשר להמשיך כך בתור תרגיל ולמצוא את הפולינומים ההרמוניים ממעלה 3, 4 וכו'.

3. כאשר פתרנו בהפרדת משתנים בתחום טבעתי, נתקלנו בייצוג קוטבי של פונקציות הרמוניות רבות: $v(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$. כלומר, בייצוג קוטבי:

$$r^n \cos(n\theta), r^{-n} \cos(n\theta), r^n \sin(n\theta), r^{-n} \sin(n\theta), 1, \ln r$$

הפונקציות $r^n \cos(n\theta)$, $r^n \sin(n\theta)$, 1 הן פולינומים הרמוניים (לאחר חזרה למשתנים קרטזיים).

למשל,

$$v(r, \theta) = r^5 \cos(5\theta)$$

בכל המקרים, על ידי חזרה למשתנים x ו- y , נקבל פונקציות הרמוניות. אם התחום D כולל את הראשית, נקבל כך רק פולינומים הרמוניים. אחרת נקבל למשל גם את $v(r, \theta) = \ln r$, כלומר:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$v(r, \theta) = \frac{1}{r^3} \sin(3\theta) \text{ כמו נוספות}$$

עיקרון הממוצע (גרסת המעגל)

התכונה הבאה היא תכונה יסודית של פונקציות הרמוניות. היא לא מתקיימת באופן כללי לפתרונות של אף מד"ח אחרת. היא מכונה **עיקרון הממוצע**.

משפט 5: נניח ש- $u(x, y)$ רציפה בעיגול $B = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\}$ והרמונית בתוכו. אז

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\partial B} u \, d\ell$$

כלומר, $u(x_0, y_0)$ שווה בדיוק לממוצע של ערכיה של שפת מעגל ברדיוס R סביב (x_0, y_0) .

עיקרון הממוצע מתקבל מנוסחת פואסון (5) (בגרסתה לעיגול כללי) אם מציבים את נקודת המרכז של העיגול.

בכל זאת, מכיוון שלא הוכחנו אותה באופן מלא ומדויק, נוכיח את עיקרון הממוצע באופן בלתי תלוי בנוסחת פואסון.

עיקרון הממוצע הוא תכונה שייחודית לפונקציות הרמוניות: פונקציה רציפה שמקיימת את עיקרון הממוצע לכל מעגל בתחום היא בהכרח הרמונית.

נעיר שניתן לכתוב את עיקרון הממוצע גם בעזרת פרמטריזציה סטנדרטית של מעגל ($d\ell = R d\theta$):

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) \, d\theta$$

הוכחת עיקרון הממוצע (גרסת המעגל)

נניח ש- $x_0 = y_0 = 0$ לצורך פשטות הסימון.

עבור $0 < r \leq R$, נגדיר

$$B_r = \{x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

נסמן

$$A(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial B_r} u \, d\ell$$

ונוכיח ש- $A(r) \equiv u(0, 0)$ לכל $r \in (0, R]$.

בעזרת פרמטריזציה סטנדרטית $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ נקבל כי

$$A(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$$

נתון כי $u(x, y)$ רציפה ולכן לפי משפט על אינטגרל פרמטרי:

$$\lim_{r \rightarrow 0+} A(r) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(0, 0) d\theta = u(0, 0)$$

בנוסף, לפי אותו משפט, $A(r)$ רציפה עבור $r \in (0, R]$

לכן אם נגדיר $A(0) := u(0, 0)$, אז $A(r)$ רציפה בקטע $[0, R]$ וגזירה בקטע הפתוח (לפי כלל לייבניץ) ובנוסף:

$$\begin{aligned} A'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (u_x(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + u_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

עבור הפרמטריזציה $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ של המעגל ברדיוס r , הוקטור $(\cos \theta, \sin \theta)$ בדיוק $\hat{n}$ - הוקטור הנורמל למעגל בנקודה שמתאימה לזווית θ .

לכן האינטגרנד הוא $\vec{\nabla} u \cdot \hat{n} = \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$ כלומר:

$$A'(r) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \oint_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\ell$$

הגורם $\frac{1}{r}$ שם כי חזרנו לאינטגרל קווי ללא הצבת פרמטריזציה. לכן לפי זהות גרין (1),

$$A'(r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{B_r} \Delta u dx dy = 0$$

כי $u(x, y)$ הרמונית, וזאת לכל $0 < r < R$.

לסיכום, $A(r)$ רציפה בקטע הסגור $[0, R]$ וגזירה בקטע הפתוח $(0, R)$, ו- $A'(r) \equiv 0$ עבור $r \in (0, R)$. לכן $A(r)$ קבועה בקטע הסגור, ומכיון ש- $A(0) = u(0, 0)$,

$$A(r) \equiv u(0, 0), \quad r \in [0, R]$$

זה מה שרצינו להוכיח.

הערה: במהלך ההוכחה הוכחנו עובדה שתהיה שימושית גם להמשך: אם u רציפה בנקודה (x_0, y_0) אז

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{2\pi r} \oint_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2} u ds = u(x_0, y_0) \quad (7)$$

עיקרון הממוצע (גרסת עיגול)

עיקרון הממוצע נכון גם עבור ממוצע על כל העיגול במקום רק על שפתו:

מסקנה 6: נניח ש- $u(x, y)$ רציפה בעיגול $B = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\}$ והרמונית בתוכו. אז

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R} u(x, y) \, dx \, dy$$

עיקרון המקסימום החזק

משפט 7: יהי $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום ותהי u הרמונית ב- D . אם $u(x, y)$ מקבלת מקסימום מוחלט ב- D , אז $u(x, y)$ קבועה ב- D .

הערות:

- נכון גם עבור מינימום.
- מתברר שהמסקנה נכונה אפילו אם יש נקודת מקסימום מקומי (או מינימום מקומי) בתוך D . את זה לא נוכיח בקורס זה, אבל מוכיחים את זה בדרך כלל בקורס בפונקציות מרוכבות.

הוכחת עיקרון המקסימום החזק

לפעם הבאה

- מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. עיקרון המקסימום החלש עבור פונקציות מרוכבות אנליטיות.
 2. המושג של יציבות במשוואות דיפרנציאליות.
 3. השיטה של הפרדת משתנים מבעיות התחלה שפה במשוואת הגלים.

“ Any fool can know. The point is to understand.

”

Ernest Kinoy