

הרצאה 8: תיאור משוואת לפלס ופתרונותיה, פתרון בקואורדינטות פולריות בהפרדת משתנים

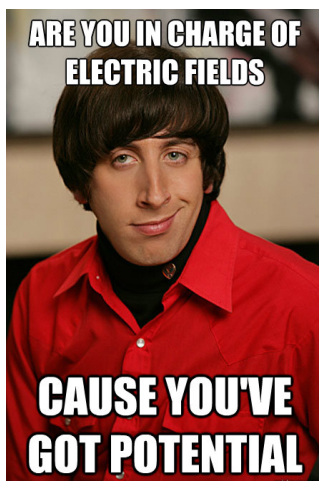
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

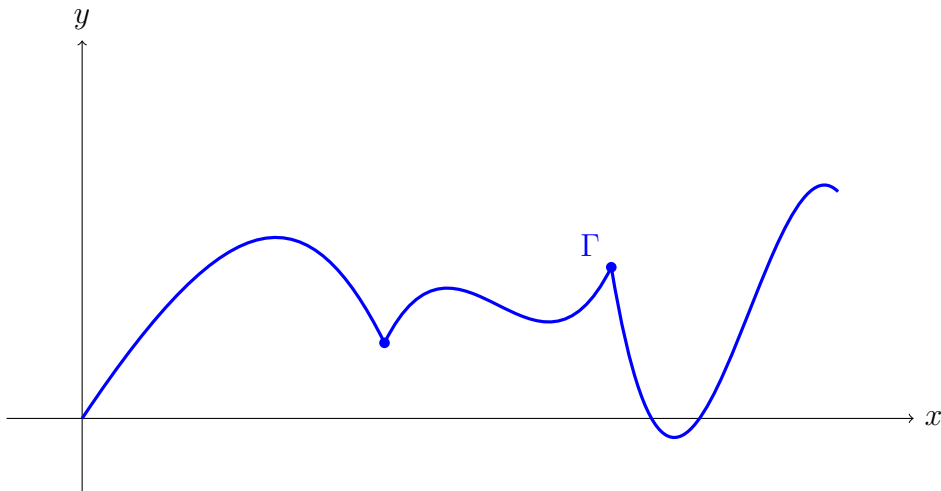
תוכן העניינים

	1	משוואת לפלס
2	1.1	הגדרות ותכונות בסיסיות
2	1.2	יחידות ותנאי הכרחי לקיום פתרון
4	1.3	פתרון בקואורדינטות פולריות באמצעות הפרדת משתנים
6		



תזכורות

הגדרה: עקום $\gamma(t)$, $t \in I$ מכונה חלק אם הוא גזיר ברציפות ובנוסף לכל $t \in I$ מתקיים כי $\gamma'(t) \neq 0$.
עקום מכונה חלק למקוטעין אם הוא שרשור של מספר סופי של עקומים חלקים.



1 משוואת לפלס

1.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

משוואות לפלס ופואסון

בפרק הזה נדון במשוואת לפלס, בעיקר בדו-מימד:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

הפונקציה הנעלמת היא פונקציה של שני משתנים, $u(x, y)$. קל להכליל את המד"ח הזו למימד כללי.

האופרטור הדיפרנציאלי המתאים: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, מכונה **הלפליאן**.

נדבר מעט גם על הגרסה האי-הומוגנית של משוואת לפלס אשר מכונה בדרך כלל **משוואת פואסון**,

$$u_{xx} + u_{yy} = F(x, y)$$

בשונה ממשוואת הגלים ומשוואת החום, לשני המשתנים בפונקציה $u(x, y)$ יש משמעות מרחבית. כלומר, אין כאן זמן t ואין אינטואיציה של אבולוציה בזמן.

לכן התחומים שטבעי לעבוד בהם כבר אינם חצי או רבע מישור, או פס - אלא תחומים מרחביים כמו עיגול, מלבן וכל תחום מורכב יותר שיש בו עניין.

המוטיבציה הפיסיקלית למשוואת לפלס ההומוגנית היא ש- $u(x, y)$ מייצג פוטנציאל חשמלי בתוך אזור שאין בו מטען חשמלי, אך יש אילוצים מסוימים על שפת האזור כפי שנראה מיד. במקרה האי-הומוגני, החלק האי-הומוגני $F(x, y)$ מייצג צפיפות מטען משטחית.

המוטיבציה המתמטית נובעת מכך שהלפליסיאן Δu מודד את ההפרש הדיפרנציאלי בין הערך של u בנקודה לבין הממוצע שלו בכל הנקודות הסמוכות. לכן משוואת לפלס קובעת שהערך של u שווה לממוצע זה.

מדובר באינטואיציה בלבד, אבל מעניין להבין אילו פונקציות מקיימות שהן שוות לממוצע של עצמן בסביבת כל נקודה, ומה התכונות המתקבלות.

בעיית דיריכלה

יש שלושה סוגים עיקריים של בעיות קושי עבור משוואת לפלס שנעסוק בהן. לצורך פשטות נדגים אותן עם משוואת לפלס ההומוגנית. נניח ש- D הוא תחום, כאשר כרגיל ∂D מסמן את השפה של D .

בבעיית דיריכלה התנאי הנלווה הוא תנאי על ערכי $u(x, y)$ על השפה:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial D \end{cases} \quad (1)$$

פתרון מכונה **אמיתי** אם $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ (גזיר ברציפות פעמיים בתוך D ורציף עד לשפה).

כדי שיהיה סיכוי לקיום פתרון אמיתי, הפונקציה הנתונה $f(x, y)$ צריכה להיות רציפה על שפת D .

דוגמה: בעיית דיריכלה בעיגול היחידה:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) = x^2 + 4y^3 & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

זה מבבלב, כי נראה שהפתרון כבר נתון על ידי $u(x, y) = x^2 + 4y^3$. אבל אלו ערכי השפה בלבד, ובאמת

$$\Delta(x^2 + 4y^3) = 2 + 24y \neq 0$$

בעיית נוימן

התנאי הנלווה הוא תנאי על ערכי הנגזרת המכוונת $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(x, y)$ על השפה, כאשר $\hat{n}(x, y)$ הוא נורמל לשפה ∂D בנקודה (x, y) שפונה החוצה:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial D \end{cases} \quad (2)$$

פתרון מכונה **אמיתי** אם $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ (גזיר ברציפות פעמיים בתוך D ופעם אחת ברציפות עד לשפה).

כדי שיהיה סיכוי לקיום פתרון אמיתי, הפונקציה הנתונה $g(x, y)$ צריכה להיות רציפה על שפת D .

דוגמה: בעית נוימן בעיגול היחידה:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial r}(x, y) = 4x & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

נציין שהסימון $\frac{\partial u}{\partial r}$ אינו מושלם. עדיף לתת שם חדש לפונקציה במשתנים r, θ , כמו

$$v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

ואז להשתמש בסימון $\frac{\partial v}{\partial r}$.

בעית רובין

התנאי הנלווה הוא תנאי מעורב:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in D, \\ u(x, y) + \alpha \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(x, y) = h(x, y), & (x, y) \in \partial D \end{cases} \quad (3)$$

כאשר $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

פתרון מכונה **אמיתי** אם $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ (גזיר ברציפות פעמיים בתוך D ופעם אחת ברציפות עד לשפה).

כדי שיהיה סיכוי לקיום פתרון אמיתי, הפונקציה הנתונה $h(x, y)$ צריכה להיות רציפה על שפת D .

בכל המקרים ניתן לדבר גם על המקרה אי-הומוגני, אז נהוג לכנות את המשוואה בשם **משוואת פואסון**.

1.2 יחידות ותנאי הכרחי לקיום פתרון

זהויות גרין

מכיוון שמשוואת לפלס היא בעצם $\Delta u = 0$, **זהויות גרין** מאנליזה וקטורית (שהן זהויות עבור הלפלסיאן Δ) יעזרו לנו להבין תכונות ראשונות של הפתרונות:

משפט 1: יהי D תחום חסום בעל שפה חלקה למקוטעין. נסמן על ידי $\hat{n}$ וקטור נורמלי חיצוני לשפה של D .

נניח ש- $u(x, y)$ ו- $v(x, y)$ גזירות ברציפות פעמיים על $\bar{D}$. אז:

$$\iint_D \Delta u \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \, ds \quad (4)$$

$$\iint_D (v \Delta u - u \Delta v) \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \left(v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} \right) \, ds \quad (5)$$

-1

$$\iint_D \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx \, dy = \oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \, ds - \iint_D v \Delta u \, dx \, dy \quad (6)$$

שלוש הזהויות נובעות באופן כמעט מיידי ממשפט גאוס לכן כדי להוכיח את המשפט, נזכיר ראשית את **משפט גאוס** מאנליזה וקטורית.

משפט 2: יהי D תחום חסום בעל שפה חלקה למקוטעין. נסמן על ידי $\hat{n}$ וקטור נורמלי חיצוני לשפה של D .

אם $\vec{F}(x, y)$ הוא שדה וקטורי אשר גזיר ברציפות על $\bar{D}$, אז

$$\iint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds$$

נעיר שזהו משפט גאוס הדו ממדי, שהוא למעשה כתיבה אחרת של משפט גרין.

יחידות ותנאי הכרחי עבור בעיית נוימן

מסקנה 3: יהי D תחום חסום בעל שפה חלקה למקוטעין.

א. אם לבעיית נוימן (2) קיים פתרון $u \in C^2(\bar{D})$ אז

$$\oint_{\partial D} g \, ds = 0 \quad (7)$$

ב. לבעיית דיריכלה (1) יש לכל היותר פתרון אחד אשר גזיר ברציפות פעמיים על $\bar{D}$.

ג. אם $u \in C^2(\bar{D})$ פתרון של בעיית נוימן (2), אז כל הפתרונות ממחלקה $C^2(\bar{D})$ של הבעיה הם בדיוק $u(x, y) + C$ כאשר $C \in \mathbb{R}$ קבוע שרירותי.

הערות:

- יחידות הפתרון בבעיית דיריכלה נכונה גם במקרה האי הומוגני, כלומר למשוואת פואסון, וגם בבעיה המעורבת.
- במסקנה יש הנחה קצת חזקה יותר על הפתרון: $u \in C^2(\bar{D})$. בהמשך נוכיח את יחידות הפתרון לבעיית דיריכלה ללא הנחה נוספת זו, כלומר עבור $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$.

דוגמאות:

1. נבדוק אם יתכן פתרון לבעיית נוימן

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 < 4 \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(x, y) = 2x^2 & x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

לפי התנאי ההכרחי לקיום פתרון לבעיית נוימן (7), אם יש פתרון אז

$$0 = \oint_{\partial D} g \, ds = \int_0^{2\pi} 2(2 \cos t)^2 \cdot 2 \cdot dt = 16\pi \neq 0$$

לכן לא קיים פתרון.

2. נתונה בעית דיריכלה

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 > 1 \\ u(x, y) = 1 & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

הנה שני פתרונות: $u(x, y) \equiv 1$ ו- $u(x, y) = 1 + \ln(x^2 + y^2)$.

אין סתירה למסקנה כי D אינו חסום.

למעשה חסר תנאי שפה באינסוף. בפיסיקה נהוג אם לא מציינים אחרת ש- u מתאפס באינסוף.

1.3 פתרון בקואורדינטות פולריות באמצעות הפרדת משתנים

משוואת לפלס בקואורדינטות פולריות

נגדיר $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ונמצא את המד"ח ש- v מקיים אם $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

חישוב בעזרת כלל השרשרת מראה כי

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}$$

לכן משוואת לפלס בקואורדינטות פולריות היא

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0$$

פתרון בגזרה

נרצה לפתור בגזרה

$$a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

כאשר יתכן כי $a = 0$ וכן יתכן כי $b = \infty$.

במקרה $a = 0$ נאפשר לעיתים $a < r \leq b$, כלומר ללא הראשית עצמה. במקרה זה יתכנו פתרונות שאינם חסומים ליד הראשית.

בנוסף, יתכן כי $\alpha = -\pi, \beta = \pi$ (תחום כמו עיגול, טבעת או חוץ על עיגול). במקרה כזה, מוכרח להתקיים

$$\begin{cases} v(r, -\pi) = v(r, \pi) \\ v_\theta(r, -\pi) = v_\theta(r, \pi) \end{cases} \quad (8)$$

כי בשני האגפים מדובר בערך $u(-r, 0)$ (אותה נקודה).

בכל המקרים, נפיק בעית שטורם ליוביל לפי θ ונציע פתרון לבעיה שהוא טור בפונקציות העצמיות המתקבלות עם מקדמים תלויי r .

נעיר שיש לכתוב את התנאים הנלווים לפי המשתנים r, θ ואז לפתח אותם לטורי פורייה לפי הפונקציות העצמיות.

פתרון כללי בטבעת באמצעות הפרדת משתנים

נפתור במקרה $\alpha = -\pi, \beta = \pi$.

הפקת בעיית שטורם ליוביל נציב $R(r) \Theta(\theta)$ לתוך המד"ח ההומוגנית בקואורדינטות פולריות ונקבל

$$R''(r) \Theta(\theta) + \frac{1}{r} R'(r) \Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \Theta''(\theta) = 0$$

נבודד משתנה בכל אגף ונקבל את בעיית שטורם ליוביל המחזורית (בגלל (8)) הבאה:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0, & -\pi < \theta < \pi, \\ \Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \\ \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi) \end{cases}$$

פתרון בעיית שטורם ליוביל הפתרון של הבעיה הנ"ל הוא מערכת פורייה הקלאסית:

$$\begin{cases} 1, \sin \theta, \cos \theta, \sin(2\theta), \dots \\ \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

פיתוחים לטורי פורייה כל מקרה לגופו.

מציאת הפתרון המוכלל בהתאם לסימון המקובל מטור פורייה קלאסי, נציע את הפתרון

$$v(r, \theta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r) \cos(n\theta) + b_n(r) \sin(n\theta)) \quad (9)$$

זו צורת הפתרון שיש להציב במד"ח ובתנאי השפה במקרה הכללי של מד"ח אי הומוגנית. אנחנו נמשיך הלאה עם מד"ח הומוגנית בשלבים הבאים. אם המד"ח הומוגנית, אז הצבת צורת הפתרון (9) למד"ח תפיק עבור $a_n(r)$ ו- $b_n(r)$ את המד"ר עבור $R(r)$ מהחלק של הפרדת המשתנים, עם $\lambda_n = n^2$ במקום λ (או על ידי הצבה ישירה):

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0$$

זו משוואת אוילר, כאשר אם נתונים תנאי שפה מכל סוג עבור $r = a$ או $r = b$ אז נקבל מכך תנאי שפה על $a_n(r)$ ו- $b_n(r)$ (נדגים מיד).

בינתיים נסיים לפתור באופן כללי ללא התחייבות לסוג של תנאי השפה (דיריכלה, נוימן...): נציב $R(r) = r^k$ ונקבל

$$k(k-1)r^k + kr^k - n^2 r^k = 0 \Rightarrow k^2 - n^2 = 0$$

כלומר, $k = \pm n$ ולכן עבור $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} a_n(r) = \alpha_n r^n + \gamma_n r^{-n}, \\ b_n(r) = \beta_n r^n + \delta_n r^{-n} \end{cases}$$

במקרה $n = 0$ נקבל $k = 0$ מריבוי 2 ולכן הפתרונות הבלתי-תלויים של משוואת אוילר במקרה הזה הם $r^0 = 1$ ו- $\ln r$. בסך הכל,

$$a_0(r) = \alpha_0 + \gamma_0 \ln r$$

לסיכום,

$$v(r, \theta) = \frac{\alpha_0 + \gamma_0 \ln r}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((\alpha_n r^n + \gamma_n r^{-n}) \cos(n\theta) + (\beta_n r^n + \delta_n r^{-n}) \sin(n\theta)) \quad (10)$$

זהו הפתרון הכללי כטור פורייה בטבעת עבור משוואת לפלס ההומוגנית. הקבועים בפתרון יקבעו בכל מקרה מתוך תנאי השפה.

בדיקת אמיתות נחזור לכך בהמשך.

דוגמה

נמצא פתרון עבור הבעיה

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) = y^2 & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

תמיד כדאי לבדוק אם במקרה הביטוי הנתון על השפה הוא במקרה פתרון לבעיה בכל העיגול.

אבל הפונקציה y^2 לא מקיימת את המד"ח, ולכן לא.

נמצא פתרון בקואורדינטות פולריות $v(r, \theta)$, ואם סביר נחזור ל- $u(x, y)$.

היות שמדובר בעיגול, בפתרון הכללי (10) חייב להתקיים

$$\gamma_0 = \gamma_n = \delta_n = 0, \quad \forall n$$

אחרת, הפתרון אינו רציף בראשית. לכן נקבל

$$v(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) r^n \quad (11)$$

נעביר את תנאי השפה ל- r, θ :

$$v(1, \theta) = u(\cos \theta, \sin \theta) = 1^2 \sin^2 \theta$$

נציב באגף שמאל את הטור ונקבל

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) = \sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta)$$

בדרך כלל בשלב זה נפתח את אגף ימין לטור פורייה ונשווה מקדמים, אבל מדובר בטור פורייה סופי ולכן בדוגמה זו זה נחסך מאיתנו. נקבל

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

וכל שאר המקדמים מתאפסים. לכן

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) r^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

לכן

$$u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (x^2 - y^2)$$

הפתרון הכללי בקואורדינטות פולריות עבור בעיית דיריכלה בעיגול

בעיית דיריכלה כללית בעיגול בעל רדיוס $R > 0$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < R^2, \\ u(x, y) = f(x, y), & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \quad (12)$$

הפתרון הכללי בהפרדת משתנים נראה כך, שוב מטעמי רציפות:

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

הייצוג עם $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ הוא משיקולי נוחות, נוח להציב תנאי שפה $r = R$:

$$f(R \cos \theta, R \sin \theta) = v(R, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

כלומר, אגף ימין הוא טור פורייה הקלאסי של $h(\theta) := f(R \cos \theta, R \sin \theta)$ ולכן:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \end{cases}$$

הפתרון שהתקבל הוא אמיתי

משפט 4: נניח כי h רציפה ומקיימת $h(-\pi) = h(\pi)$, וכן h' רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$. נסמן ב- a_n, b_n את מקדמי פורייה הממשיים הקלאסיים של h בקטע $[-\pi, \pi]$. אז

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

פתרון אמיתי יחיד של הבעיה

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0 & 0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi \\ v(R, \theta) = h(\theta) & -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

הערה: פונקציה $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת **רציפה למקוטעין** בקטע $[a, b]$ אם היא מוגדרת בכל הקטע פרט אולי למספר סופי של נקודות, ורציפה בכל נקודה פרט אולי למספר סופי של נקודות שבהן הגבולות החד-צדדיים בכל זאת קיימים.

נוכל להוכיח את המשפט באופן כללי בקרוב, בעזרת עיקרון המקסימום החלש. בינתיים נקפיד שלא להשתמש בו מלבד בתור השראה ומוטיבציה.

לפעם הבאה

- מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. אינטגרציה איבר איבר עבור טור פונקציות מתכנס במידה שווה.
 2. כלל לייבניץ לגזירה של אינטגרל פרמטרי.
 3. מטריצת ההסיאן והתנאי ההכרחי לנקודת קיצון מקומי בעזרתה.
 4. תנאי קושי להתכנסות במידה שווה של טור פונקציות.

“ *Nature laughs at the difficulties of integration.*

”

Pierre-Simon, Marquis de Laplace