

הרצאה 7: הפרדת משתנים, אינטגרל אנרגיה

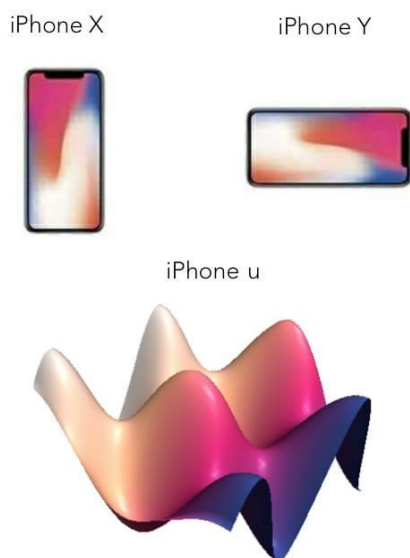
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

- 1 משוואת הגלים (המשך) 2
- 1.1 פתרון עבור מיתר סופי בעזרת הפרדת משתנים (המשך) 2



$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = u, & (x, t) \in (0, 10) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = u(10, t) = 0, & t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 10), \\ u_t(x, 0) = x(10 - x), & x \in (0, 10). \end{cases}$$

1 משוואת הגלים (המשך)

1.1 פתרון עבור מיתר סופי בעזרת הפרדת משתנים (המשך)

בעית התחלה שפה היפרבולית כללית

השיטה של הפרדת משתנים תעבוד באותו אופן בדיוק עבור מיתר סופי ועבור מד"ח אחרות, כל עוד הן ניתנות לכתיבה באופן הבא. ראשית, המד"ח ותנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{r(x)m(t)} ((p(x)u_x)_x + q(x)u) = F(x, t) & a < x < b, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & a \leq x \leq b \\ u_t(x, 0) = g(x) & a \leq x \leq b \end{cases} \quad (1)$$

הנחות כלליות:

• הפונקציות $q(x)$, $r(x)$ רציפות, והפונקציה $p(x)$ גזירה ברציפות בקטע $[a, b]$.

• הפונקציה $m(t)$ רציפה וחיובית עבור $t \geq 0$.

• לכל $x \in [a, b]$, $r(x) > 0$, $p(x) > 0$.

שנית, עבור תנאי השפה יש שתי אפשרויות נפרדות.

לעיתים יהיו נתונים **תנאי שפה רגולריים** (אשר יובילו לבעית שטורם ליוביל רגולרית)

$$\begin{cases} \alpha u(a, t) + \beta u_x(a, t) = 0 & t \geq 0 \\ \gamma u(b, t) + \delta u_x(b, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

כאשר α, β אינם שניהם 0, וכן γ, δ אינם שניהם 0.

לעיתים יהיו נתונים **תנאי שפה מחזוריים** (אשר יובילו לבעית שטורם ליוביל מחזורית)

$$\begin{cases} u(a, t) = u(b, t) & t \geq 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

כאשר $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $p'(x)$ צריכות אז להיות שוות בקצוות הקטע a, b .

נזכיר שבכל מקרה, פונקציות עצמיות אשר מתאימות לערכים עצמיים שונים הן ניצבות ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle X, \tilde{X} \rangle = \int_a^b X(x) \overline{\tilde{X}(x)} r(x) dx$$

במקרה של בעיה רגולרית כל הערכים העצמיים הם **פשוטים**, כלומר לכל אחד מתאימה פונקציה עצמית אחת עד כדי כפל בסקלר. במקרה של בעיה מחזורית יתכן ריבוי גיאומטרי ששווה ל-2, ובמקרה זה חשוב לבחור פונקציות עצמיות ניצבות לכל אחד מהערכים העצמיים.

לבסוף נזכיר את הנוסחה למקדמים בפיתוח לטור בפונקציות עצמיות: $h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} h_n X_n(x)$ כאשר

$$h_n = \frac{\langle h, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} = \frac{\int_a^b h(x) \overline{X_n(x)} r(x) dx}{\int_a^b |X_n(x)|^2 r(x) dx} \quad (4)$$

תיקון במקרה של תנאי שפה רגולריים שאינם אפס

ההצלחה של פתרון בשיטה של הפרדת משתנים במקרה הרגולרי מותנית בכך שתנאי השפה מתאפסים. אם לא, ראשית נבצע תיקון $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ כך שבבעיה המתוקנת עבור $w(x, t)$ תנאי השפה אכן מתאפסים. ניתן אז לפתור עבור $w(x, t)$ ובסוף לחשב בחזרה את $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$.

אפשר לתקן בכל דרך שעובדת, אבל תבנית פשוטה שכדאי לרוב לצאת ממנה היא

$$v(x, t) = A(t)(Ax^2 + Bx + C) + B(t)(Dx^2 + Ex + F)$$
 כאשר $A(t)$ הוא תנאי השפה בקצה השמאלי ו- $B(t)$ הוא תנאי השפה בקצה הימני.

יש לבחור את הקבועים A, B, C, D, E, F כך שיתקיים

$$v(a, t) = A(t), \quad v(b, t) = B(t)$$

דוגמאות:

1. נניח שתנאי השפה הנתונים הם

$$u(0, t) = t^3, \quad u(\pi, t) = \sin t$$

במקרה זה אפשר לנחש פונקציית תיקון שמקיימת תנאי שפה אלו בלי לעבור דרך הצורה הכללית, למשל:

$$v(x, t) = \frac{x}{\pi} \sin t + \frac{x - \pi}{-\pi} t^3$$

2. נניח שתנאי השפה הנתונים הם

$$u(1, t) + u_x(1, t) = 6t, \quad u(2, t) = e^t$$

נחפש פונקציית תיקון מהצורה

$$v(x, t) = 6t(Ax^2 + Bx + C) + e^t(Dx^2 + Ex + F)$$

צריך להתקיים

$$\begin{cases} 6t(A + B + C) + e^t(D + E + F) + 6t(2A + B) + e^t(2D + E) = 6t \\ 6t(4A + 2B + C) + e^t(4D + 2E + F) = e^t \end{cases}$$

נשווה מקדמים ונקבל את המשוואות

$$\begin{cases} 3A + 2B + C = 1 \\ 4A + 2B + C = 0 \\ 3D + 2E + F = 0 \\ 4D + 2E + F = 1 \end{cases} \iff A = -1, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = 1, \quad E = -\frac{3}{2}, \quad F = 0$$

כלומר, פונקציית תיקון מתאימה:

$$v(x, t) = 6t(-x^2 + 2x) + e^t\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)$$

תהודה

נפתור את הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos(2\pi x) \cos(2\pi t) & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = \cos^2(\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = 2 \cos(2\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

זו בעיית נוימן.

התנאים לפתרון אמיתי יהיו: u, u_{tt}, u_{xx} קיימים ורציפים ב- D וכן u, u_t, u_x קיימים ורציפים ב- $\bar{D}$.
נעבוד לפי השלבים.

הפקת בעיית שטורם ליוביל נציב $X(x)T(t)$ למד"ח ההומוגנית:

$$X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} =: -\lambda$$

לכן נקבל

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & 0 < x < 1 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרון בעיית שטורם ליוביל בדקו שהפתרון נתון על ידי $\lambda_n = n^2\pi^2, n = 0, 1, \dots$ ו-

$$X_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

פיתוחים לטורי פורייה למזלנו, כל התנאים הנלווים הם כבר צירופים לינארים של הפונקציות העצמיות.

$$\begin{cases} f(x) = \cos^2(\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi x) = \frac{1}{2}X_0(x) + \frac{1}{2}X_2(x) \\ g(x) = 2 \cos(2\pi x) = 2X_2(x) \\ F(x, t) = \cos(2\pi x) \cos(2\pi t) = \cos(2\pi t) X_2(x) \end{cases}$$

מציאת הפתרון המוכלל נציב $u(x, t) = a_0(t) \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) X_n(x)$ לבעיה.

ראשית, נציב למד"ח:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi t) X_2(x) = u_{tt} - u_{xx} &= a_0''(t) X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t) X_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) X_n''(x) \\ &= a_0''(t) X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n''(t) + n^2\pi^2 a_n(t)) X_n(x) \end{aligned}$$

נשווה מקדמים ונקבל:

$$\begin{cases} a_0''(t) = 0 \Rightarrow a_0(t) = A_0 t + B_0 \\ a_n'' + n^2\pi^2 a_n = 0 \Rightarrow a_n(t) = A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t) & n \neq 2 \\ a_2'' + 4\pi^2 a_2 = \cos(2\pi t) \end{cases}$$

ננחש פתרון פרטי עבור $n = 2$.

השורשים של הפולינום האופייני הם $\pm 2\pi i$ מריבוי 1. החלק האי הומוגני הוא $\cos(2\pi t)$ ולכן ננחש פתרון פרטי מהצורה

$$a_2(t) = Ct \cos(2\pi t) + Dt \sin(2\pi t)$$

נציב למד"ר ונקבל

$$\cos(2\pi t) = a_2'' + 4\pi^2 a_2 = -4\pi C \sin(2\pi t) + 4\pi D \cos(2\pi t)$$

לכן נבחר $C = 0$ וכן $D = \frac{1}{4\pi}$. לכן קיבלנו פתרון כללי עבור $n = 2$

$$a_2(t) = A_2 \cos(2\pi t) + B_2 \sin(2\pi t) + \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t)$$

מעניין לציין שהביטוי $\frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t)$ אינו חסום, ואי חסימות זו תיגרר גם לפתרון $u(x, t)$. נדון בכך בקרוב, אך נשים לב שהגורם לאי חסימות הוא שבחלק האי הומוגני $F(x, t)$ הופיע הביטוי $\cos(2\pi t)$ אשר מתאים לשורש של הפולינום האופייני.

נעבור כעת לתנאי ההתחלה. נקבל

$$a_0(0) X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) X_n(x) = u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{2} X_0(x) + \frac{1}{2} X_2(x)$$

לכן נקבל $a_0(0) = a_2(0) = \frac{1}{2}$, ולכל $n \neq 0, 2$ מתקיים $a_n(0) = 0$

באופן דומה,

$$a_0'(0) X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0) X_n(x) = u_t(x, 0) = g(x) = 2X_2(x)$$

לכן נקבל $a_2'(0) = 2$, ולכל $n \neq 2$ מתקיים $a_n'(0) = 0$

נוכל כעת למצוא את כל ה- $a_n(t)$.

עבור $n = 0$ נקבל

$$\begin{cases} a_0(t) = A_0 t + B_0 \\ a_0(0) = \frac{1}{2} \\ a_0'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow a_0(t) \equiv \frac{1}{2}$$

עבור $n = 2$ נקבל

$$\begin{cases} a_2(t) = A_2 \cos(2\pi t) + B_2 \sin(2\pi t) + \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t) \\ a_2(0) = \frac{1}{2} \\ a_2'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}$$

בנוסף,

$$a_2'(t) = -\pi \sin(2\pi t) + 2\pi B_2 \cos(2\pi t) + \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi t) + \frac{t}{2} \cos(2\pi t)$$

לכן $2 = a_2'(0) = 2\pi B_2$ ולכן $B_2 = \frac{1}{\pi}$.

$$a_2(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) + \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t)$$

עבור $n \neq 0, 2$ נקבל

$$\begin{cases} a_n(t) = A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t) \\ a_n(0) = 0 \\ a'_n(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow a_n(t) \equiv 0$$

לסיכום:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) \cos(2\pi x) + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) \cos(2\pi x) + \frac{t}{4\pi} \sin(2\pi t) \cos(2\pi x)$$

קיבלנו סכום של ביטוי חסום (הכל פרט למחובר האחרון) וביטוי לא חסום (המחובר האחרון). בסך הכל, המשרעת שואפת לאינסוף כאשר $t \rightarrow \infty$. במיתר אמיתי זה יוביל לאסון.

דוגמה מפורסמת היא הגשר Tacoma Narrows Bridge אשר לפי האגדה האורבנית קרס כתוצאה מרוח בעלת תדירות השווה לתדירות עצמית של הגשר (הרוח מיוצגת על ידי החלק האי הומוגני $F(x, t)$). האמת אולי קצת יותר מורכבת, אבל זה בכל אופן מעניין. הנה **סרטון** של הארוע.

נעיר שזה קרה כי החלק האי הומוגני שהוא הכוח החיצוני על מיתר פועל בתדירות עצמית של המיתר.

בדיקת אמיתות הפתרון הוא טור סופי ולכן בוודאי אמיתי.

הוכחת יחידות בעזרת אינטגרל אנרגיה

משפט 1: לבעיה

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & t > 0, a < x < b, \\ u(x, 0) = f(x), & a \leq x \leq b, \\ u_t(x, 0) = g(x), & a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = A(t), & t \geq 0, \\ u(b, t) = B(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

יש פתרון אחד לכל היותה.

רעיון ההוכחה: נשתמש באינטגרל האנרגיה

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_a^b (w_t(x, t)^2 + c^2 w_x(x, t)^2) dx \quad (5)$$

זו שיטה שעובדת ברוב בעיות ההתחלה שפה (שבהן אכן יש יחידות).

נעיר כי לבעיה אחרת יתאים אינטגרל אנרגיה אחר, כך שזו רק דוגמה לשיטה של הוכחת יחידות.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. פוטנציאלי חשמלי ובמיוחד המשוואה המתקבלת ממשוואות מקסוול עבורו (לא חובה, אבל מועיל לאינטואיציה).
2. הגדרה וחישוב של אינטגרל קווי מסוג ראשון ומסוג שני.
3. משפט הדיברגנץ של גאוס.
4. משפט הפונקציות ההפוכות ובמיוחד הקשר בין מטריצות הנגזרות של העתקה $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ וההופכית שלה.
5. טור פורייה ממשי קלאסי בקטע $[0, \pi]$, כולל הנוסחאות לחישוב מקדמי פורייה.
6. משוואת אוילר במד"ר.

“Engineers like to solve problems. If there are no problems handily available, they will create their own problems.”

”

Scott Adams