

הרצאה 6: מיתר אינסופי חד צדדי, מיתר סופי, הפרדת משתנים

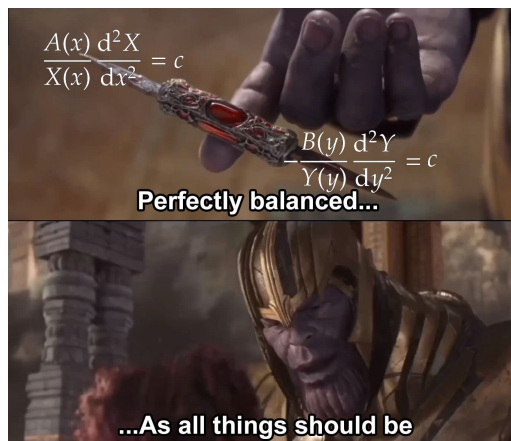
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

3	1 משוואת הגלים (המשך)
3	1.1 פתרון עבור מיתר אינסופי חד צדדי בעזרת הרחבה סימטרית (המשך)
4	1.2 פתרון עבור מיתר אינסופי חד צדדי בעזרת כלל המקבילית
5	1.3 מיתר סופי
6	1.4 פתרון עבור מיתר סופי בעזרת הפרדת משתנים



תזכורות

בעיית קושי עבור מיתר אינסופי דו צדדי:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

נוסחת דלמבר עבורה:

משפט 1: נניח כי $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ ו- $F, \frac{\partial F}{\partial x}$ רציפות ב- $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ (חצי המישור העליון). אז קיים פתרון יחיד לבעיית קושי (1), והוא נתון על ידי נוסחת דלמבר המורחבת:

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \iint_{\Delta(x,t)} F(s, \tau) ds d\tau$$

בנוסף, לכל $T > 0$ קבוע, בעיית קושי עבור $t \in [0, T]$ היא מוצגת היטב: קיים פתרון יחיד ויש יציבות, כלומר, לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם:

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \delta, \quad |g_1(x) - g_2(x)| < \delta, \quad |F_1(x, t) - F_2(x, t)| < \delta$$

לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $t \in [0, T]$, אז $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \epsilon$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $t \in [0, T]$.

בעיית קושי עבור מיתר אינסופי חד צדדי:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = h(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

פתרון מוכלל עבורה בעזרת הרחבה סימטרית: עבור $x \geq ct$,

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau \quad (3)$$

עבור $x < ct$,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{f(ct - x) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \left(\pm \int_{x-ct}^0 g(-s) ds + \int_0^{x+ct} g(s) ds \right) \\ & + \frac{1}{2c} \left(\pm \int_0^{t-\frac{x}{c}} \int_{x-c(t-\tau)}^0 F(-s, \tau) ds d\tau \right. \\ & \left. + \int_0^{t-\frac{x}{c}} \int_0^{x+c(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau + \int_{t-\frac{x}{c}}^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau \right) \end{aligned} \quad (4)$$

1 משוואת הגלים (המשך)

1.1 פתרון עבור מיתר אינסופי חד צדדי בעזרת הרחבה סימטרית (המשך)

תיקון תנאי שפה

אם $h(t) \neq 0$ אז שיטת הפתרון שתוארה לא עובדת. הרחבה זוגית תיתן בהכרח $u_x(0, t) \equiv 0$ והרחבה אי זוגית תיתן בהכרח $u(0, t) \equiv 0$.

במקרה הכללי אפשר לבצע קודם תיקון בהתאם לפירוט בטבלה הבאה.

פונקציית עזר	סוג בעיה
$w(x, t) = u(x, t) - h(t)$	דיריכלה $u(0, t) = h(t)$
$w(x, t) = u(x, t) - xh(t)$	נוימן $u_x(0, t) = h(t)$

יש אפשרויות אחרות בכל אחד מהמקרים, אבל אלו הפשוטות ביותר. בכל מקרה, עוקבים אחרי השלבים הבאים:

1. כותבים את הבעיה עבור פונקציית העזר $w(x, t)$ באמצעות עיקרון הסופרפוזיציה.
2. פותרים את הבעיה עבור $w(x, t)$ על ידי הרחבה סימטרית.
3. מוצאים בחזרה את $u(x, t)$ בעזרת הקשר הפשוט המתואר בטבלה בינו לבין $w(x, t)$.

פתרונות אמיתיים ומוכללים, תנאי תאימות

אמרנו כבר שעבור בעיית קושי (2) יש תנאי תאימות $f(0) = h(0)$ שנובע מכך ששני הערכים הללו שווים לערך של הפתרון $u(0, 0)$.

באופן דומה, עבור בעיית נוימן נקבל תנאי תאימות $f'(0) = h(0)$ היות ששני הערכים הללו שווים לערך של $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$.

הפתרון שמתקבל על ידי הרחבה סימטרית יהיה אמיתי תחת הנחות מסוימות על התנאים הנלווים, שנקראות **תנאי תאימות מורחבים**. יש שתי גישות להבנת תנאים אלו במקרה שתנאי השפה מקיים $h(t) \equiv 0$:

1. אם ההרחבות $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{F}$ מקיימות את תנאי משפט 1 אז הפתרון המתקבל הוא אמיתי לפי משפט זה.
2. אם הפונקציה $u(x, t)$ אשר מוגדרת על ידי (3) כאשר $x \geq ct$ ועל ידי (4) כאשר $x < ct$ היא C^2 ברביע הראשון הפתוח $(0, \infty) \times (0, \infty)$ ו- C^1 על הרביע הראשון הסגור $[0, \infty) \times [0, \infty)$, אז היא פתרון אמיתי.

על פניו, הגישה הראשונה נותנת תנאי מספיק לאמיתיות הפתרון. הגישה השנייה היא ההגדרה של היות הפתרון אמיתי, ולכן זהו תנאי הכרחי ומספיק.

נסו לתרגם בשני המקרים לתנאי תאימות על f, g, F הנתונות.

באופן כללי יותר, אם $h(t)$ אינה פונקציית האפס, יש לנו בכל זאת אלגוריתם למציאת פתרון על ידי תיקון ואז הרחבה סימטרית. ניתן להפעיל את שתי הגישות הנ"ל על הבעיה המתוקנת בסימון כללי וכך למצוא תנאי תאימות על f, g, F, h .

1.2 פתרון עבור מיתר אינסופי חד צדדי בעזרת כלל המקבילית

פתרון בעזרת כלל המקבילית במקרה של בעית דיריכלה הומוגנית

השיטה הבאה עובדת רק במקרה ההומוגני, ורק בבעית דיריכלה. היתרון הוא שאין צורך שיתקיים $h(t) \equiv 0$.

נניח אם כן שנתונה בעית דיריכלה הומוגנית (2) (כלומר, $F(x, t) \equiv 0$) עבור מיתר אינסופי הומוגני חד צדדי:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = h(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

ראינו כבר שעבור $x \geq ct$, הפתרון $u(x, t)$ נתון על ידי נוסחת דלמבר עם התנאים הנלווים הנתונים. נותר לתאר את הפתרון עבור $0 \leq x < ct$.

השיטה עובדת לפי השלבים הבאים:

1. מוצאים את $u(x, t)$ במקרה $x \geq ct$ בעזרת נוסחת דלמבר עם התנאים הנלווים הנתונים.
2. עבור נקודה שמקיימת $0 \leq x < ct$, מציירים מקבילית אופיינית שהקודקוד הגבוה ביותר שלה הוא בנקודה (x, t) , הקודקוד שמשמאל הוא על ציר τ , הקודקוד הנמוך הוא על ציר s , והקודקוד הרביעי נקבע בהתאם.
3. ערכי הפתרון ידועים בכל הקודקודים פרט לנקודה (x, t) לפי השלב הראשון, תנאי ההתחלה ותנאי השפה. לכן לפי כלל המקבילית אפשר לחשב את $u(x, t)$.
4. יש לבדוק שהפתרון שהתקבל הוא אמיתי:

$$\bullet u \in C^2((0, \infty)^2)$$

$$\bullet u \in C([0, \infty)^2)$$

$$\bullet u_t \in C([0, \infty)^2)$$

יש לתת תשומת לב מיוחדת לקו התפר $x = ct$ בין שני הביטויים שיתקבלו.

אם אחד מהתנאים לא מתקיימים אז הפתרון אינו אמיתי. כלומר, יתכן שיתקבל פתרון מוכלל.

פיתוח כללי של פתרון באמצעות כלל המקבילית

נכתוב את הפרטים, אך בשום אופן לא כדאי לזכור מכך שום דבר. במקרה הצורך, עובדים עם המקבילית באופן ישיר ומבצעים את החישובים.

אם $x \geq ct$ נקבל לפי נוסחת דלמבר כי

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (5)$$

אם $x \leq ct$ נצייר כאמור מקבילית אופיינית שהקודקוד העליון שלה הוא (x, t) ושני קודקודים אחרים שלה נמצאים על צירי s ו- τ .

הקו אשר מחבר את (x, t) אל ציר τ הוא $s - c\tau = x - ct$. לכן נקודת החיתוך עם ציר τ היא $\tau = t - \frac{x}{c}$.
הקו אשר מחבר את $(0, t - \frac{x}{c})$ אל ציר s הוא $s + c\tau = ct - x$. לכן נקודת החיתוך עם ציר s היא $s = ct - x$.

הקודקוד הרביעי הוא נקודת החיתוך בין שני הקווים האופייניים

$$\begin{cases} s - c\tau = ct - x \\ s + c\tau = x + ct \end{cases} \Rightarrow s = ct, \tau = \frac{x}{c}$$

כלומר, קודקודי המקבילית האופיינית $ABCD$ הם בסך הכל

$$A(x, t), B\left(ct, \frac{x}{c}\right), C(ct - x, 0), D\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

לכן לפי כלל המקבילית,

$$u(x, t) + u(ct - x, 0) = u\left(0, t - \frac{x}{c}\right) + u\left(ct, \frac{x}{c}\right)$$

מתקיים כי $ct > c \cdot \frac{x}{c}$ ולכן לפי הביטוי עבור u שמצאנו בעזרת נוסחת דלמבר, תנאי ההתחלה ותנאי השפה:

$$u(x, t) = h\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{f(ct - x) + f(ct + x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(s) ds - f(ct - x) \quad (6)$$

1.3 מיתר סופי

מבוא לבעיות התחלה שפה

עד כה דיברנו על מיתר אינסופי דו צדדי וחד צדדי. אלו למעשה בדרך כלל קירובים של המציאות, שבה אורכי המיתרים סופיים.

מתברר שבמקרה של מיתר סופי, אין נוסחה כמו נוסחת דלמבר או הכללותיה אשר תאפשר לנו למצוא את הפתרון $u(x, t)$ מתוך הבעיה הנתונה. כלומר, הפתרון הוא בדרך כלל פונקציה מסובכת.

לכן נזדקק לפשרה: **קירוב** של הפתרון בעזרת פונקציות פשוטות יחסית. העובדה שזה אכן ניתן היא בגדר נס.

מה פירוש קירוב של פונקציה? יש שתי אפשרויות (שהן שני צדדים של אותו מטבע): $u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$ או $u(x, t) = \sum_n u_n(x, t)$ (טור אינסופי). מתברר שכמו ברוב המקרים בפיסיקה, הדרך הטבעית ביותר תהיה על ידי טור פונקציות.

נבהיר שהמטרה תהיה טור שמהווה פתרון מדויק. הקירוב הוא כי בפועל לא ניתן לחשב בדרך כלל את סכום הטור כולו, ולכן מקרבים בעזרת "מספיק" מחוברים.

מבחינה רעיונית, הרעיון יהיה דומה לפתרון של מד"ר באמצעות טורי חזקות. אבל יש הבדל חשוב: הפעם יהיה מדובר בטור מסוג אחר, **טור פורייה**. יתברר שזהו הכלי המתאים ביותר לבעיה.

נדייק את הבעיה שעליה נדבר. אנחנו נחפש פתרון $u(x, t)$ בקבוצה

$$\overline{D} = \{(x, t) : a \leq x \leq b, t \geq 0\}$$

השפה ∂D מורכבת משלושה קווים ישרים: $x = a$ ו- $x = b$ ("שפה"), ו- $t = 0$ ("התחלה"). לכן התנאים הנלווים יהיו נתונים על קווים אלו. בעיה כזו מכונה **בעית התחלה שפה**.

מיתר סופי רגולרי

הסוג הראשון של מיתר סופי שנפתור בעזרת הפרדת משתנים נתון בבעיה הכללית הבאה.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) & a < x < b, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & a \leq x \leq b \\ u_t(x, 0) = g(x) & a \leq x \leq b \\ \alpha u(a, t) + \beta u_x(a, t) = 0 & t \geq 0 \\ \gamma u(b, t) + \delta u_x(b, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

כאשר α, β אינם שניהם 0, וכן γ, δ אינם שניהם 0.

תנאי השפה (שתי השורות התחתונות ב-(7)) מכונים **תנאי שפה רגולריים**.

הבעיה הזו מאפשרת לבטא כל מיני מצבים שנתקלנו בהם במיתר אינסופי חד צדדי, כמו למשל:

1. **מיתר קשור** בשני קצותיו, $u(a, t) = u(b, t) = 0$.
 2. **מיתר חופשי** בשני קצותיו, $u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0$.
 3. מיתר קשור בקצה אחד וחופשי בקצה השני, $u_x(a, t) = u(b, t) = 0$ או להיפך.
- בנוסף, ניתן לתאר כל מיני מצבים נוספים בהתאם לבחירת $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

מיתר סופי מחזורי

הסוג השני של מיתר סופי שנפתור בעזרת הפרדת משתנים נתון בבעיה הכללית הבאה.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) & a < x < b, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & a \leq x \leq b \\ u_t(x, 0) = g(x) & a \leq x \leq b \\ u(a, t) = u(b, t) & t \geq 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

תנאי השפה (שתי השורות התחתונות ב-(8)) מכונים **תנאי שפה מחזוריים**.

תנאי שפה אלו מבטאים **לולאה**: הנקודה $x = a$ היא אותה נקודה כמו $x = b$ על המיתר "במציאות".

1.4 פתרון עבור מיתר סופי בעזרת הפרדת משתנים

שיטת הפתרון

בעיות שטורם ליוביל, הניצבות של הפונקציות העצמיות שלהן והפיתוח של פונקציה לטור פורייה מוכלל לפיהן מרוכזים בקובץ הרצאה 5.5. מעתה נראה לשם מה כל זה נחוץ.

הרעיון הכללי הוא לפתח את הפתרון $u(x, t)$ של בעיה נתונה כטור פורייה מוכלל בפונקציות העצמיות של בעית שטורם ליוביל מתאימה עם מקדמים תלויי זמן. כלומר,

$$u(x, t) = \sum a_n(t) X_n(x)$$

כדי להבין את הרעיון, את השלבים ואת הטכניקה, נפרט תחילה את שלבי הפתרון.

1. מפקים בעית שטורם ליוביל אשר מתאימה לבעיה הנתונה על ידי הצבה של $X(x)T(t)$ במקום $u(x, t)$ לתוך המד"ח ההומוגנית ותנאי השפה.
 2. פותרים את בעית שטורם ליוביל שהופקה ומקבלים סדרה של פונקציות עצמיות $(X_n(x))_{n=1}^{\infty}$ וערכים עצמיים מתאימים $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$.
 3. מפתחים את התנאים הנלווים כולל החלק האי הומוגני כטורי פורייה לפי הפונקציות העצמיות. בפיתוח של החלק האי הומוגני, המקדמים יהיו בדרך כלל תלויים בזמן.
 4. מציבים $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) X_n(x)$ לתוך הבעיה הנתונה וכך מוצאים את המקדמים $a_n(t)$.
 5. בודקים אמיתיות על ידי בדיקה שהטורים המתאימים ל- $u(x, t)$ וכל נגזרת שנחוצה מתכנסים במידה שווה בתחומים המתאימים.
- זה בדרך כלל מתבצע על ידי בדיקת התכנסות במידה שווה (לרוב בעזרת מבחן ה-M של וירשטראס).

דוגמה ראשונה של פתרון בשיטה של הפרדת משתנים

נפתור את הבעיה הבאה באמצעות הפרדת משתנים:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = x & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

הפקת בעית שטורם ליוביל נציב $X(x)T(t)$ לתוך המד"ח ותנאי השפה, ונקבל

$$\begin{cases} X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0 & \iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}, 0 < x < \pi, t > 0 \\ X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

בשורה הראשונה (של המד"ח), שוויון בין פונקציות במשתנים שונים מחייב שהן קבועות.

לכן קיים קבוע λ כך שמתקיים $-\lambda = \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$ (מטרת המינוס לקבל בעית שטורם ליוביל בצורתה המוכרת).

לכן $X'' + \lambda X = 0$. נעיר שגם $T'' + \lambda T = 0$, אך מכך נתעלם (בינתיים).

בשורה השנייה (של תנאי השפה), אם $T(t) \neq 0$, אז $X(0) = X(\pi) = 0$.

בסך הכל קיבלנו כמובטח בעית שטורם ליוביל

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

נעיר שבכל בעיה יש לבצע את השלב הזה, כי בעית שטורם ליוביל המתאימה יכולה להיות שונה.

פתרון בעית שטורם ליוביל בדקו כי אף $\lambda \leq 0$ אינו ערך עצמי. עבור $\lambda > 0$ הפתרון הכללי הוא

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

נציב את תנאי השפה ונקבל מיד ש- $A = 0$ ו- $B \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$.

על מנת שהפתרון לא יהיה טריוויאלי, צריך להתקיים $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. זה קורה אם ורק אם $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, כלומר:

$$\lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

הפונקציה המתאימה היא $X_n(x) = \sin(nx)$ (או כל כפולה שלה בסקלר).

נפתח את תנאי ההתחלה $f(x) = x$ לטור פורייה מוכלל **פיתוחים לטורי פורייה**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx)$$

כאשר

$$f_n = \frac{\int_0^\pi x \sin(nx) dx}{\int_0^\pi \sin^2(nx) dx} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \right) dx \right) = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n}$$

נעיר שהשתמשנו באינטגרציה בחלקים עם $u = x$, $v' = \sin(nx)$ עבורה $u' = 1$, $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$. החלק האי הומוגני הוא $F(x, t) \equiv 0$, ולכן אפשר לדלג על חישובי אינטגרלים:

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \sin(nx) \quad (F_n(t) \equiv 0)$$

באותו אופן עבור תנאי ההתחלה $g(x) \equiv 0$.

לסיכום, הפיתוח היחיד המשמעותי הוא

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

נציב **מציאת הפתרון המוכלל** $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(nx)$ לתוך המד"ח ותנאי ההתחלה:

$$0 = u_{tt} - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n''(t) + n^2 a_n(t)) \sin(nx)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \sim x = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin(nx)$$

$$0 = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0) \sin(nx)$$

כעת נשווה מקדמי פורייה מוכללים:

$$\begin{cases} a_n''(t) + n^2 a_n(t) = 0 \\ a_n(0) = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \\ a_n'(0) = 0 \end{cases}$$

קיבלנו בעית התחלה מסדר 2 עבור $a_n(t)$. פתרונה $a_n(t) = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \cos(nt)$ ולכן בסך הכל

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \cos(nt) \sin(nx)$$

בדוקמה זו אין תנאי תאימות עבור $u(\pi, 0)$. מצד אחד,

$$u(x, 0) = x \Rightarrow u(\pi, 0) = \pi$$

מצד שני,

$$u(\pi, t) = 0 \Rightarrow u(\pi, 0) = 0$$

כלומר, יש סתירה פנימית בבעיה. לכן לבעיה אין פתרון, ולכן לא יתכן שהפתרון אמיתי.

הערות והבחנות לגבי תהליך הפתרון

נציין מספר הערות והבחנות שימושיות.

1. אם המד"ח הומוגנית אז הצבת $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) X_n(x)$ לתוך המד"ח והשוואת מקדמים תוביל למד"ר עבור $a_n(t)$ אשר כתובה בשלב הפרדת המשתנים והפקת בעית שטורם ליוביל עבור $T(t)$, כאשר יש להציב לכל n את הערך העצמי λ_n המתאים במקום λ .

יש לזכור שחובה בכל זאת להציב את הטור לתוך תנאי ההתחלה במקרה זה, ולכן לא ברור אם החיסכון מצדיק לזכור את כלל האצבע ואת הטעות של להשתמש בו כאשר המד"ח אינה הומוגנית.

2. אם תנאי תאימות אינם מתקיימים (למשל, שוויון בפינות) אז אין פתרון אמיתי מראש.

3. אם תנאי תאימות מתקיימים (למשל, שוויון בפינות) אז צריך לבדוק בסוף אם הפתרון שהתקבל אמיתי או לא. לא ניסחנו משפט שאומר כי הפתרון בהכרח אמיתי במצב זה.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. אנרגיה קינטית ופוטנציאלית של מיתר בפיסיקה. לא חובה, אבל יכול להועיל לאינטואיציה.

“ There are two theories of light, the wave theory and the corpuscle theory. We believe the wave theory because all those who believed the corpuscle theory have died. ”

James Clerk Maxwell