

הרצאה 5.5: בעיות שטורם-ליוביל

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 בעיות שטורם-ליוביל
2	1.1 הגדרות ודוגמאות
8	1.2 תכונות של בעיות שטורם ליוביל
10	1.3 פיתוח של פונקציה לפי הפונקציות העצמיות



תזכורות

הגדרה: פונקציה f נקראת **רציפה למקוטעין** בקטע $[a, b]$ אם היא מוגדרת בכל הקטע פרט אולי למספר סופי של נקודות, ורציפה בכל נקודה פרט אולי למספר סופי של נקודות שבהן הגבולות החד-צדדיים בכל זאת קיימים.

שתי פונקציות רציפות למקוטעין נקראות **שקולות** אם הן נבדלות במספר סופי של נקודות.

מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[a, b]$ מסומן $E[a, b]$, ואין בו הבחנה בין שתי פונקציות שקולות.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. **מכפלה פנימית** על V היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ שהיא לינארית ברכיב הראשון, מקיימת $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ לכל $u, v \in V$, וכן $\langle v, v \rangle > 0$ לכל $v \in V$, $v \neq 0$.

שני וקטורים מכונים **ניצבים** אם המכפלה הפנימית שלהם מתאפסת, וסדרת וקטורים מכונה **אורתונורמלית** אם איבריה ניצבים בזוגות וכל אחד מהם מקיים $\langle v, v \rangle = 1$.

נזכיר גם את תהליך גרהם-שמידט, שממיר בסיס של תת-מרחב ממימד סופי לבסיס אורתונורמלי שלו.

משפט 1: מרחב הפתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מסדר שני הוא מרחב וקטורי ממימד 2.

1 בעיות שטורם-ליוביל

1.1 הגדרות ודוגמאות

מבוא ובעיות שטורם-ליוביל רגולריות

הגדרה: עבור פונקציה נעלמת $v(x)$ ונעלם סקלרי λ , **בעית שטורם-ליוביל** היא בעיה מהצורה

$$\begin{cases} (pv')' + qv + \lambda rv = 0, & a < x < b, \\ \alpha v(a) + \beta v'(a) = 0, \\ \gamma v(b) + \delta v'(b) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

נדגיש שזו בעיה עם שני נעלמים: פונקציה $v(x)$ ומספר λ . המטרה היא למצוא פתרונות (v, λ) .

זו לא בעיה שאנו רגילים לראות. במקום שני תנאי התחלה $v(a), v'(a)$, יש שני תנאי שפה בנקודות שונות. לכן גם משפט הקיום והיחידות אינו תקף.

דרישות:

• הפונקציות $q(x)$ ו- $r(x)$ רציפות, והפונקציה $p(x)$ גזירה ברציפות בקטע $[a, b]$.

• לכל $x \in [a, b]$, $r(x) > 0$.

• המספרים α ו- β לא שניהם אפס, והמספרים γ ו- δ לא שניהם אפס.

בעיה כזו נקראת **בעיית שטורם-ליוביל רגולרית**.

הגדרה: **אופרטור שטורם-ליוביל** הוא $L[v] = (pv')' + qv$.

מטרתנו תהיה למצוא פתרונות לא טריוויאליים. נראה שלרוב ערכי λ , אין.

הגדרה 2. יהי $\lambda \in \mathbb{C}$. נאמר כי λ הוא ערך עצמי של בעית שטורם ליוביל (1) אם קיימת פונקציה $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ אשר פותרת את הבעיה עבור ערך λ זה. במקרה זה, כל פונקציה כזו $v(t) \not\equiv 0$ מכונה פונקציה עצמית השייכת לערך העצמי λ .

הערה: אם $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ אז לכל $t \in [a, b]$ אפשר לכתוב $v(t) = y(t) + iz(t)$. אומרים כי $v(t)$ גזירה כאשר $y(t), z(t)$ שתיהן גזירות, ובמקרה זה $v'(t) = y'(t) + iz'(t)$.

השם הגיוני אם כותבים את התנאי לפתרון הבעיה באופן

$$-\frac{1}{r(x)}L[v] = \lambda v$$

כלומר, מדובר בערכים עצמיים ובקטורים עצמיים של האופרטור $-\frac{1}{r(x)} \cdot L$.

בעיות דיריכלה ונוימן

דוגמאות:

1. בעיית שטורם-ליוביל רגולרית פשוטה:

$$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0, & 0 < x < L, \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

בעיית שטורם ליוביל רגולרית שבתנאי השפה שלה מופיע רק v (ולא v') מכונה לעיתים **בעיית דיריכלה**.

נעיר ראשית שלכל λ יש פתרון טריוויאלי $v(x) \equiv 0$. נחפש פתרונות לא טריוויאליים.

זו מד"ר עם מקדמים קבועים שהפולינום האופייני שלה הוא $p(r) = r^2 + \lambda$. לכן הפתרון הכללי של המד"ר שונה לפי הסימן של λ .

אם $\lambda < 0$ אז הפתרון הכללי הוא

$$v(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|x}} + Be^{-\sqrt{|\lambda|x}}$$

נציב את תנאי השפה:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ e^{\sqrt{|\lambda|L}}A + e^{-\sqrt{|\lambda|L}}B = 0 \end{cases}$$

נזכיר שאנחנו מחפשים פתרון לא טריוויאלי, כלומר, לא $A = B = 0$. לכן נווח להציג את המערכת הזו באופן מטריצי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|L}} & e^{-\sqrt{|\lambda|L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן יש פתרון לא טריוויאלי אם ורק אם הדטרמיננט של מטריצת המקדמים מתאפס, כלומר $e^{\sqrt{|\lambda|}L} = e^{-\sqrt{|\lambda|}L}$.

זה לא יתכן עבור $\lambda < 0$ ולכן אין פתרון לא טריוויאלי במקרה הזה.

נעיר שניתן לכתוב את הפתרון הכללי במקרה $\lambda < 0$ גם באופן הבא, וכדאי לעשות זאת אם אחד מקצוות הקטע הוא כמו כאן $a = 0$:

$$v(x) = A \cosh(\sqrt{|\lambda|x}) + B \sinh(\sqrt{|\lambda|x})$$

נסו לעשות מחדש את השלבים שעשינו עם צורת פתרון זו.

עבור $\lambda = 0$ הפתרון הכללי הוא $v(x) = Ax + B$, ותנאי השפה מיד אומרים $A = B = 0$.

עבור $\lambda > 0$ הפתרון הכללי הוא

$$v(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

נציב את תנאי השפה ונקבל מיד ש- $A = 0$ ו-

$$B \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

על מנת שהפתרון לא יהיה טריוויאלי, צריך להתקיים $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$. זה קורה אם ורק אם $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, כלומר:

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

הפונקציה המתאימה היא $v(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ (או כל כפולה שלה בסקלר).

נשים לב שקיבלנו **סדרה של פונקציות**.

2. בעיית שטורם-ליוביל רגולרית נוספת:

$$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0, & 0 < x < L, \\ v'(0) = v'(L) = 0 \end{cases}$$

בעיית שטורם ליוביל רגולרית שבתנאי השפה שלה מופיע רק v' (ולא v) מכונה לעיתים **בעיית נוימן**.

בדקו שאם $\lambda < 0$ אז אין פתרון לא טריוויאלי.

עבור $\lambda = 0$ הפתרון הכללי הוא $v(x) = Ax + B$ ותנאי השפה הוא

$$A = A = 0$$

כלומר, יש פתרון $\lambda_0 = 0$ עם $v_0(x) = 1$.

אם $\lambda > 0$, הפתרון הכללי הוא כמו קודם

$$v(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

לכן

$$v'(x) = -\sqrt{\lambda}A \sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

וננוכל לכתוב את תנאי השפה:

$$\sqrt{\lambda}B = 0 \Rightarrow B = 0$$

וכעת

$$-\sqrt{\lambda}A \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

לכן בסך הכל $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ פתרון עם

$$v_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

הפונקציות העצמיות הן בסך הכל

$$1, \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \dots$$

בדוגמאות קיבלנו מערכות אינסופיות של פונקציות שמוגדרות בקטע $[0, L]$.

מה שאולי יפתיע הוא שזו תמיד תהיה מערכת אורתוגונלית ביחס למכפלה פנימית מתאימה, ומה שיפתיע יותר הוא שהיא תמיד תהיה "בסיס" במובן מסוים במרחב פונקציות רציפות למקוטעין בקטע.

נחזור לזה בהמשך.

הערות:

- בעית שטורם ליוביל רגולרית לא חייבת להיות בהכרח בעית דיריכלה או בעית נוימן. למשל, תנאי השפה יכול להיות $v(a) = v(b) - 2v'(b) = 0$.

בעיה כזו (שאינה בעית דיריכלה או בעית נוימן) מכונה לפעמים בעיה **מעורבת**.

- בהינתן בעית שטורם ליוביל בקטע $[a, b]$ עם מד"ר $v'' + \lambda v = 0$, לעיתים כדאי לכתוב את הפתרון הכללי של המד"ר בצורה

$$v(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) + B \sin(\sqrt{\lambda}(x-a))$$

במקרה $\lambda > 0$, ובצורה

$$v(x) = A \cosh(\sqrt{-\lambda}(x-a)) + B \sinh(\sqrt{-\lambda}(x-a))$$

במקרה $\lambda < 0$.

אלו צורות שקולות לצורה שאנחנו בדרך כלל משתמשים בה. במילים אחרות, מדובר בבחירה של בסיס אחר למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית.

בנוסף, במקרים מסוימים, יתכן שיש אף צורות נוספות שיכולות להועיל. למשל,

$$v(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}(x-a)) + B \sin(\sqrt{\lambda}(x-b))$$

בעיות שטורם-ליוביל מחזוריות

בדומה לבעיית שטורם-ליוביל רגולרית, נפגוש גם בעיית שטורם-ליוביל מחזורית. ההבדל הוא בתנאי השפה, שבמקום להיות "רגולריים" הם "מחזוריים":

$$\begin{cases} v(a) = v(b), \\ v'(a) = v'(b) \end{cases}$$

בנוסף, נציב דרישות על מקדמי המשוואה p, q, r :

$$p(a) = p(b), \quad p'(a) = p'(b), \quad q(a) = q(b), \quad r(a) = r(b)$$

אלו תנאי מחזוריות.

דוגמה: בעיית שטורם-ליוביל מחזורית פשוטה:

$$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0, & -L < x < L, \\ v(-L) = v(L), \\ v'(-L) = v'(L) \end{cases}$$

בדקו שאין ערכים עצמיים שליליים.

הערך $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי כי הפתרון הכללי המתאים של המד"ר הוא

$$v(x) = Ax + B$$

ותנאי השפה נותנים:

$$\begin{cases} -AL + B = AL + B, \\ A = A \end{cases} \Rightarrow A = 0, \quad B \in \mathbb{R}$$

כלומר, $v_0(x) = 1$ פונקציה עצמית שמתאימה לערך העצמי $\lambda_0 = 0$.

לבסוף, עבור $\lambda > 0$ ראינו שהפתרון הכללי הוא

$$v(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

לכן

$$v'(x) = -\sqrt{\lambda}A \sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

ותנאי השפה המחזוריים הם לכן

$$\begin{cases} A \cos(\sqrt{\lambda}L) - B \sin(\sqrt{\lambda}L) = A \cos(\sqrt{\lambda}L) + B \sin(\sqrt{\lambda}L), \\ \sqrt{\lambda}A \sin(\sqrt{\lambda}L) + \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}L) = -\sqrt{\lambda}A \sin(\sqrt{\lambda}L) + \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}L) \end{cases}$$

לכן כדי שיהיה פתרון לא טריוויאלי, בהכרח $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, כלומר:

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

במקרה הזה כל פונקציה מהצורה

$$v(x) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

היא פונקציה עצמית, מה שאומר שיש בעצם שתי פונקציות עצמיות בלתי-תלויות לינארית.

סדרת הפונקציות שקיבלנו מכונה **מערכת פורייה הממשית הקלאסית** בקטע $[-L, L]$.

בשתי הדוגמאות שראינו, $r(x) \equiv 1$, $p(x) \equiv 0$ ו- $q(x)$ בבעיות "מעניינות" יותר (כלומר, מסובכות יותר) זה לא דווקא יקרה, אבל עיקרון הפתרון זהה. ההבדל הוא רק בצורת הפתרון הכללי של המד"ר.

1.2 תכונות של בעיות שטורם ליוביל

הבאה לשטורם ליוביל באמצעות גורם אינטגרציה

נעיר שהמד"ר בבעיית שטורם-ליוביל נראית שהיא בעלת צורה ייחודית, אבל בעצם:

משפט 3: המד"ר

$$av'' + bv' + cv = d$$

כאשר a, b, c, d פונקציות רציפות ו- $a(x) > 0$ ניתנת לכתיבה כך:

$$(pv')' + qv = f$$

ההוכחה מראה גם בדיוק איך עוברים מהצורה הכללית של מד"ר לינארית מסדר שני לצורה הפרטית של אופרטור שטורם-ליוביל.

זה חשוב, כי כפי שנראה, לעיתים חשוב לזהות את $r(x)$. אם המד"ר אינה כתובה בצורה (1), הגורם שכופל את λv בדרך כלל לא יהיה $r(x)$.

תכונות רקע

יש מאפיינים דומים בכל פתרון של בעיית שטורם-ליוביל. בתור הכנה למאפיינים הללו, נזדקק לכמה תכונות מקדימות. התכונות לא ייראו מרגשות, אבל יהיו שימושיות בהוכחה של תכונות מאוד מרגשות בהמשך.

לאורך כל התכונות הבאות, נניח בלי לציין זאת בכל פעם כי $u, v \in C^2([a, b])$.

תכונות:

1. זהות לגרנז': לכל שתי פונקציות u, v :

$$uLv - vLu = (p(uv' - u'v))'$$

בקטע (a, b) .

2. נוסחת גרין: לכל שתי פונקציות u, v :

$$\int_a^b (uLv - vLu) = p(uv' - u'v)|_a^b$$

3. סימטריות: אם $u(x)$ ו- $v(x)$ מקיימות את תנאי השפה של הבעיה (ולאו דווקא את המד"ר), אז

$$\int_a^b uLv = \int_a^b vLu$$

ניצבות

משפט 4. אם $u(x)$ ו- $v(x)$ פונקציות עצמיות שמתאימות לערכים עצמיים שונים, אז

$$\int_a^b u(x) v(x) r(x) dx = 0$$

הערה: חשוב לשים לב שמדובר בניצבות מסוג מוזר: המכפלה הפנימית היא עם משקל $r(x)$ (לעיתים מסמנים את אותו מרחב ב- $E_r[a, b]$ כדי לאותת שיש להשתמש בפונקציית משקל במכפלה הפנימית), ובנוסף אין צמוד על v .

הערכים העצמיים ממשיים

משפט 5: כל הערכים העצמיים ממשיים.

ניתן לבחור פונקציות עצמיות ממשיות

משפט 6: לכל ערך עצמי λ יש פונקציות עצמיות ממשיות מתאימות, כך שכל פונקציה עצמית של λ ניתנת לכתיבה כצירוף לינארי שלהן.

כלומר, **למרחב העצמי** שמתאים ל- λ יש בסיס שמורכב מפונקציות ממשיות בלבד. בנוסף, אפשר להפעיל עליו את תהליך גרהם-שמידט ביחס למכפלה הפנימית של $E_r[a, b]$ ולקבל בכך בסיס אורתונורמלי.

מסקנה 7: יש מערכת אורתונורמלית $\{v_0(x), v_1(x), \dots\}$ (ביחס למכפלה הפנימית של $E_r[a, b]$) של פונקציות עצמיות ממשיות, שפורשת את כל הפונקציות העצמיות של הבעיה.

תכונות מתקדמות של הערכים העצמיים

1. **ערכים עצמיים פשוטים:** בבעיה הרגולרית, כל ערך עצמי הוא **פשוט** (יש פונקציה עצמית אחת בלבד, עד כדי כפל בסקלר).

בבעיה המחזורית, יתכן **ניוון**, כלומר, ריבוי גיאומטרי שגדול מאחד: שתי פונקציות עצמיות בלתי-תלויות של אותו ערך עצמי. נזכיר שבכל מקרה לא יתכן שיש יותר משתיים, כי לפי משפט 1 למד"ר עצמה יש רק שני פתרונות בלתי-תלויים.

2. **סדרת הערכים העצמיים:** אפשר לסדר את הערכים העצמיים של הבעיה הרגולרית כסדרה עולה ששואפת לאינסוף:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

במקרה המחזורי, כנ"ל אבל יש אפשרות לניוון ולכן נהוג לספור פעמיים ערכים עצמיים שיש להם ריבוי גיאומטרי ששווה ל-2. לכן במקרה זה אפשר לכתוב

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$$

כאשר $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

1.3 פיתוח של פונקציה לפי הפונקציות העצמיות

קורס מזורז על טורי פורייה

בקורס באנליזה הרמונית תלמדו לעומק את התורה של **טורי פורייה**. אנחנו נדבר עליהם באופן קליל בלבד כדי ללמוד את התכונה האחרונה החשובה של פונקציות עצמיות.

אוסף הפונקציות הרציפות למקוטעין הוא כאמור מרחב מכפלה פנימית עם

$$\langle f, g \rangle_r = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} r(x) dx$$

בכל מרחב מכפלה פנימית מושרית נורמה

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

ובעזרתה ניתן להגדיר **התכנסות בנורמה של טור וקטורים**: אומרים כי $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ מתכנס בנורמה לוקטור אם s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n v_k - s \right\| = 0$$

בהינתן סדרה אורתוגונלית של וקטורים $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ כמו פונקציות עצמיות של בעית שטורס ליוביל, הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n$$

מכונה **טור פורייה** של v ביחס למערכת.

במרחב ממימד סופי, לא תיתכן סדרה אינסופית אורתוגונלית של וקטורים, ובמקרה כזה אם ניקח סדרה מקסימלית אז נקבל בסיס וטור פורייה שווה ל- v .

אחרת, מקבלים את ההיטל האורתוגונלי של v על $\text{span} \{v_1, \dots, v_n\}$.

במקרה האינסופי ממדי כמו מרחב פונקציות:

הגדרה: אם לכל v במרחב מתקיים שטור פורייה מתכנס בנורמה ל- v , אז אומרים שהסדרה היא מערכת אורתוגונלית סגורה.

משפט 8. המערכת האורתוגונלית של הפונקציות העצמיות בבעית שטורס ליוביל שתיארנו $\{v_0, v_1, \dots\}$ היא סגורה במרחב $E_r[a, b]$. בפרט, לכל $f \in E_r[a, b]$ מתקיים כי

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, v_n \rangle_r v_n$$

נכתוב את השוויון הזה במפורש, ובאותה הזדמנות גם נניח שהמערכת רק אורתוגונלית כי בפועל לפעמים מתעצלים לנרמל:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n$$

כאשר

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) v_n(x) r(x) dx}{\int_a^b v_n(x)^2 r(x) dx}$$

ההוכחה של סגירות המערכת ארוכה, וכך גם הוכחות נוספות שלא כללנו. לא נכסה אותן בקורס.

דיון ודוגמאות

כל בעיית שטורם ליוביל מפיקה לנו מערכת סגורה של פונקציות עצמיות במרחב $E[a, b]$ כך שניתן לפתח כל פונקציה לטור פורייה.

זאת אומרת שיש לנו באופן כללי אינסוף טורים אפשריים עבור פונקציה $f \in E[a, b]$. איך נבחר את הטור הטוב ביותר?

התשובה היא שכדאי לזהות בעיית שטורם ליוביל ש- f מקיימת את **תנאי השפה** שלה. זה יתן את הפיתוח המוצלח ביותר (התכנסות במידה שווה! נראה מיד).

דוגמה: נפתח את הפונקציה $f(x) \equiv 1$ בקטע $[0, L]$ לפי המערכת שקיבלנו מהבעיה

$$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0, & 0 < x < L, \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

זה מנוגד לכלל האצבע כי f אינה מקיימת $f(0) = f(L) = 0$. זה לא אומר שאי אפשר לפתח, אלא רק שזו כנראה בחירה לא מוצלחת. נעשה את זה בכל זאת:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

כאשר

$$a_n = \frac{\int_0^L 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx} = \frac{-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L}{\frac{L}{2}} = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

לכן

$$1 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right)$$

אם היינו משתמשים במערכת שקיבלנו מהבעיה השנייה שפתרנו, אז 1 היא פונקציה עצמית ולכן הטור הוא סופי והקירוב הוא מושלם. זה אמנם לא מרשים כמו פיתוח של פונקציה שאינה פונקציה עצמית שבכל זאת מתכנס במידה שווה ל- f , אבל זה לפחות תואם לכלל האצבע שעדיף לבחור בעייה ש- f מקיימת את תנאי השפה שלה.

נעיר לבסוף שאין שוויון נקודתי למשל עבור $x=0$. הפירוש של הסימון $\sim$ הוא התכנסות מסוג חדש, **בנורמה**.

התכנסות של טורי פורייה מוכללים לפי פונקציות עצמיות

משפט 9: תהי $f \in E[a, b]$ כך ש- f גזירה פרט למספר סופי נקודות בקטע $[a, b]$ וכן $f' \in E[a, b]$.

1. משפט דיריכלה: הפיתוח של f לפי פונקציות עצמיות של בעיית שטורם ליוביל מתכנס נקודתית לערך $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ לכל $a < x < b$.

2. אם בנוסף f רציפה ומקיימת את תנאי השפה של הבעיה, אז הפיתוח מתכנס ל- f במידה שווה בקטע $[a, b]$.

לא נוכיח את המשפט. ההוכחות מצריכות עיסוק זהיר בפרטים של בעיית שטורם ליוביל כללית.

דוגמה: ראינו כי $1 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right)$ בקטע $[0, L]$.

לפי המשפט, יש התכנסות נקודתית ל-1 לכל $0 < x < L$. נשים לב שבקצוות יש בכלל התכנסות ל-0. בפרט, סכום הטור אינו רציף בקטע $[0, L]$ ולכן אין התכנסות במידה שווה.

הערה: בדיון על פיתוח לטור ועל סגירות, ההתכנסות היא התכנסות מסוג חדש ולא מוכר שנקראת התכנסות בנורמה. היא לא גוררת באופן כללי התכנסות נקודתית או התכנסות במידה שווה, ולכן השתמשנו גם בסימון $\sim$. בקורס באנליזה הרמונית תתעמקו בהתכנסות זו ובמה שקשור אליה.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. כלל המקבילית למשוואת הגלים ההומוגנית.
2. התכנסות במידה שווה ובמיוחד משפט הגזירה איבר איבר ומבחן ה- M של וירשטראס.

“ If I had inherited a fortune I should probably not have cast my lot with mathematics.

”

Joseph Lagrange