

הרצאה 5: מיתר אינסופי דו צדדי אי הומוגני, מיתר אינסופי חד צדדי

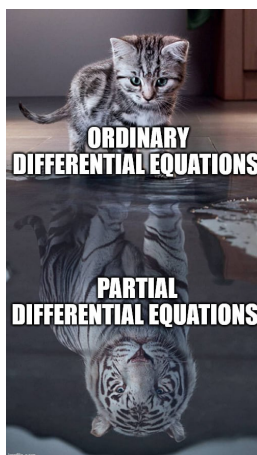
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1	משוואת הגלים (המשך)	2
1.1	מיתר אינסופי דו צדדי אי הומוגני	2
1.2	מיתר אינסופי חד צדדי	3
1.3	פתרון עבור מיתר אינסופי חד צדדי בעזרת הרחבה סימטרית	5



תזכורות

הגדרה:

1. פונקציה נקראת זוגית אם לכל x בתחום ההגדרה מתקיים כי $-x$ גם נמצא בתחום ההגדרה ובנוסף

$$f(-x) = f(x)$$

2. פונקציה נקראת אי זוגית אם לכל x בתחום ההגדרה מתקיים כי $-x$ גם נמצא בתחום ההגדרה ובנוסף

$$f(-x) = -f(x)$$

משפט 1:

1. אם $f(x)$ פונקציה אי זוגית שמוגדרת בנקודה $x = 0$ אז $f(0) = 0$.

2. אם $f(x)$ פונקציה זוגית וגזירה אז $f'(x)$ פונקציה אי זוגית.

3. אם $f(x)$ פונקציה אי זוגית וגזירה אז $f'(x)$ פונקציה זוגית.

1 משוואת הגלים (המשך)

1.1 מיתר אינסופי דו צדדי אי הומוגני

נוסחת דלמבר אי הומוגנית

נרחיב את בעיית קושי לאפשר משוואת גלים אי-הומוגנית:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

אפשר לחשוב על $F(x, t)$ כאל כוח חיצוני אשר פועל על המיתר בנקודה x בזמן t .

חשוב לזכור שהפתרון הכללי וכלל המקבילית כבר אינם תקפים. הפתרון בהכרח לא יהיה סופרפוזיציה של גל מתקדם וגל נסוג, אלא אם $F(x, t) \equiv 0$. נוסחת דלמבר גם היא כבר לא תקפה, אך מתברר שאותה ניתן להרחיב. נזכיר ש- $\Delta(x, t)$ מסמן את המשולש האופייני שקודקודו העליון (x, t) .

משפט 2: נניח כי $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ ו- $F, \frac{\partial F}{\partial x} \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$ (חצי המישור העליון). אז קיים פתרון יחיד לבעיית קושי (1), והוא נתון על ידי נוסחת דלמבר המורחבת:

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \iint_{\Delta(x, t)} F(s, \tau) ds d\tau$$

בנוסף, לכל $T > 0$ קבוע, בעיית קושי עבור $t \in [0, T]$ היא מוצגת היטב: קיים פתרון יחיד ויש יציבות, כלומר, לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם:

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \delta, \quad |g_1(x) - g_2(x)| < \delta, \quad |F_1(x, t) - F_2(x, t)| < \delta$$

לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $t \in [0, T]$ או $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \epsilon$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $t \in [0, T]$.

מכיוון שהצלעות של המשולש (במישור $s\tau$) נתונות על ידי $s \pm c\tau = x \pm ct$, אפשר לכתוב אותו באופן הבא:

$$\Delta(x, t) = \{(s, \tau) : 0 \leq \tau \leq t, x - c(t - \tau) \leq s \leq x + c(t - \tau)\}$$

לכן האינטגרל החדש בנוסחה הוא

$$\iint_{\Delta(x, t)} F(s, \tau) \, ds \, d\tau = \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(s, \tau) \, ds \, d\tau$$

דוגמאות ופתרונות מוכללים

דוגמה: נפתור את הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 4xt, \\ u(x, 0) = \sin(1997x), \\ u_t(x, 0) = 4 \sin x \end{cases}$$

נציב בנוסחת דלמבר:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\sin[1997(x+t)] + \sin[1997(x-t)]}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 4 \sin s \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} 4s\tau \, ds \\ &= \frac{\sin[1997(x+t)] + \sin[1997(x-t)]}{2} + 2[\cos(x-t) - \cos(x+t)] + \\ &\quad + \int_0^t \tau [(x+(t-\tau))^2 - (x-(t-\tau))^2] \, d\tau \\ &= \sin(1997x) \cos(1997t) + 4 \sin x \sin t + \int_0^t \tau \cdot 2x \cdot 2(t-\tau) \, d\tau \\ &= \sin(1997x) \cos(1997t) + 4 \sin x \sin t + 4x \left(t \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \\ &= \sin(1997x) \cos(1997t) + 4 \sin x \sin t + \frac{2}{3} xt^3 \end{aligned}$$

הערה: פתרון מוכלל מוגדר באותו אופן כמו במקרה ההומוגני, כלומר, בלי ההנחה שתנאי המשפט $f \in C^2, g \in C^1, F, F_x \in C$ מתקיימים.

1.2 מיתר אינסופי חד צדדי

שימור של סימטריות

משפט 3: נניח ש- $u(x, t)$ הוא הפתרון היחיד של בעיית קושי (1) (כאשר מתקיימים תנאי משפט 2).

- אם f, g פונקציות זוגיות ו- $F(x, t)$ זוגית לפי המשתנה x , אז $u(x, t)$ זוגית לפי המשתנה x .
- אם f, g פונקציות אי-זוגיות ו- $F(x, t)$ אי-זוגית לפי המשתנה x , אז $u(x, t)$ אי-זוגית לפי המשתנה x .

3. אם f, g פונקציות T -מחזוריות ו- $F(x, t)$ T -מחזורית לפי המשתנה x , אז $u(x, t)$ T -מחזורית לפי המשתנה x .

אפשר להוכיח את המשפט על ידי שימוש בנוסחת דלמבר האי הומוגנית: בדקו למשל שבמקרה הזוגי מתקבל לפי הנוסחה כי $u(-x, t) = u(x, t)$.

אנחנו נדגים גישה אחרת של הוכחה, שהיא לאו דווקא קצרה יותר אבל מדגימה שיטה שונה.

דיון ומוטיבציה עבור מיתר אינסופי חד צדדי

נוסחת דלמבר מתאימה לפתרון בתחום $x \in \mathbb{R}$ ו- $t \geq 0$, בלבד, שאנו מכנים **מיתר אינסופי דו-צדדי**. למעשה, גם אם התחום קטן יותר, אז נוסחת דלמבר עדיין תעבוד עבור $u(x, t)$ - בתנאי שהמשולש האופייני $\Delta(x, t)$ מוכל כולו בתחום.

בסעיף הזה נדבר על פתרון עבור **מיתר אינסופי חד-צדדי**, כלומר, נפתור למשל את בעיית קושי הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = h(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

הסיבה המתמטית לתנאי הנוסף הוא שיש חלק נוסף של שפה בגלל שאנחנו ברביע הראשון ולא בחצי המישור העליון.

הסיבה הפיזיקלית לתנאי הנוסף הוא שמיתר אינסופי חד צדדי צריך להיות מאולץ באיזשהו אופן בקצהו. למעשה, יש מספר אפשרויות ולא רק את התנאי המצוין בבעיה הנ"ל:

1. תנועה מוכתבת של קצה המיתר: התנאי $u(0, t) = h(t)$ כמו בבעיה הנ"ל מכונה **תנאי דיריכלה**. פירושו שאנו קובעים באופן חיצוני (על ידי הפעלת הכוח הנדרש לשם כך) את תנועת קצה המיתר $x = 0$ בכל זמן.

נניח למשל כי $h(t) \equiv 0$. כלומר, מדובר בבעית דיריכלה $u(0, t) \equiv 0$. במקרה זה המשמעות היא שנקודת הקצה של המיתר $x = 0$ כל הזמן נמצאת בגובה $u = 0$. כלומר, המיתר **קשור** בקצהו השמאלי.

נשים לב שכדי שיהיה סיכוי לפתרון אמיתי, חייב להתקיים $f(0) = h(0)$ (הערך בפינה קונסיסטנטי). לתנאי מסוג כזה קוראים **תנאי תאימות**.

2. מתיחות מוכתבת על קצה המיתר: התנאי $u_x(0, t) = h(t)$ מכונה **תנאי נוימן**.

הערך $u_x(0, t)$ הוא (עד כדי כפל בקבוע) המתיחות בקצה המיתר בזמן t .

אם נתון למשל כי $u_x(0, t) \equiv 0$, המשמעות היא שאין כל מתיחות בקצה המיתר. כלומר, המיתר רפוי, או **חופשי**. דמיינו כבל חשמל קטוע שמשתולל.

בבעית נוימן צריך להתקיים $h(0) = f'(0)$ כדי שתהיה תאימות של $u_x(0, 0)$.

3. קצה מיתר הקשור לקפיץ: התנאי $\alpha u(0, t) + \beta u_x(0, t) = 0$ מכונה **תנאי רובין**, או **תנאי מעורב**.

זהו המצב כאשר קצה המיתר קשור לקפיץ אשר רפוי בגובה $u = 0$, כך שהמתיחות בקצה המיתר נמצאת ביחס ישר לסטייה $u(0, t)$ מנקודת שיווי המשקל של הקפיץ.

יש שתי גישות עיקריות לפתרון.

הגישה הראשונה כללית יותר. כדי להשתמש בה, צריך להתקיים $h(t) \equiv 0$. אם $h(t) \neq 0$, נראה שניתן לבצע ראשית תיקון ואז להשתמש בה. היא מסתמכת על שימור סימטריה שהוכחנו. אם מדובר בבעיית דיריכלה, מרחיבים את התנאים הנלווים באופן אי-זוגי ביחס ל- x . אם מדובר בבעיית נוימן, מרחיבים את התנאים הנלווים באופן זוגי ביחס ל- x .

הגישה השניה היא לבעיית דיריכלה $u(0, t) = h(t)$ הומוגנית $F(x, t) \equiv 0$. במקרה זה אפשר להשתמש בנוסחת דלמבר עבור הנקודות שמקיימות $x - ct \geq 0$ (כי אז המשולש האופייני מוכל בתחום), ובכלל המקבילית עבור הנקודות האחרות - $x - ct \leq 0$.

1.3 פתרון עבור מיתר אינסופי חד צדדי בעזרת הרחבה סימטרית

פתרון על ידי הרחבה אי זוגית עבור בעיית דיריכלה

נתאר בפירוט את השיטה של הרחבה סימטרית שתוארה לפתרון בעיית קושי (2).

במקרה של בעיית דיריכלה עם תנאי שפה $u(0, t) \equiv 0$, נגדיר הרחבות אי זוגיות

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ -f(-x) & x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ -g(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{F}(x, t) = \begin{cases} F(x, t) & x \geq 0, t > 0 \\ -F(-x, t) & x < 0, t > 0 \end{cases}$$

נפתור את הבעיה הבאה עבור מיתר אינסופי דו צדדי:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = \tilde{F}(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{u}_t(x, 0) = \tilde{g}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

לפי משפט 3, הפתרון $\tilde{u}(x, t)$ יהיה אי זוגי לפי x . לכן לפי תכונות של פונקציות אי זוגיות, $\tilde{u}(0, t) = 0$ לכל $t \geq 0$. לכן אם נצטמצם לאזור הרלוונטי:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t), \quad x \geq 0$$

נקבל פתרון של בעיית המיתר האינסופי החד צדדי (2).

פתרון על ידי הרחבה זוגית עבור בעיית נוימן

במקרה של בעיית נוימן עם תנאי שפה $u_x(0, t) \equiv 0$, נגדיר הרחבות זוגיות

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}, \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ g(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{F}(x, t) = \begin{cases} F(x, t) & x \geq 0, t > 0 \\ F(-x, t) & x < 0, t > 0 \end{cases}$$

נפתור את הבעיה הבאה עבור מיתר אינסופי דו צדדי:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = \tilde{F}(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{u}_t(x, 0) = \tilde{g}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

לפי משפט 3, הפתרון $\tilde{u}(x, t)$ יהיה זוגי לפי x . לכן לפי תכונות של פונקציות אי זוגיות, יהיה אי זוגי לפי x ולכן $\tilde{u}_x(0, t) = 0$ לכל $t \geq 0$. לכן

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t), \quad x \geq 0$$

פותר את הבעיה.

הבחנות לגבי פתרון על ידי הרחבה סימטרית

מספיק לחשב את הפתרון של הבעיה עבור $\tilde{u}(x, t)$ במקרה $x \geq 0$ בלבד היות שזה כל מה שנחוץ עבור הפתרון שאנחנו מחפשים $u(x, t)$.

אם עבור נקודה מסוימת (x, t) מתקיים כי כל המשולש האופייני $\Delta(x, t)$ מוכל ברביע הראשון, אז $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ מתקבל בנקודה כזו על ידי הצבה ישירה בנוסחת דלמבר - ללא צורך בהרחבות סימטריות של f, g, F . זה קורה כי כל הנקודות אשר מוצבות לתוך $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{F}$ הן אי שליליות וההרחבות בנקודות כאלה שוות לפונקציות המקוריות f, g, F . זה המצב כאשר $x - ct \geq 0$, כלומר לנקודות שנמצאות מימין לקו האופייני העולה שעובר בראשית:

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau \quad (3)$$

אם $x - ct < 0$ (אבל עדיין $x \geq 0$), המשולש האופייני מחולק לאזור $s < 0$ ואזור $s \geq 0$. הצלע השמאלית שלו היא $x - ct = s - c\tau$ ולכן נקודת החיתוך עם ציר t היא $t = \frac{x}{c} - \tau$. מכאן כבר לא קשה לכתוב את שני האינטגרלים בזהירות:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\pm f(ct - x) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \left(\pm \int_{x-ct}^0 g(-s) ds + \int_0^{x+ct} g(s) ds \right) \\ & + \frac{1}{2c} \left(\pm \int_0^{t-\frac{x}{c}} \int_{x-c(t-\tau)}^0 F(-s, \tau) ds d\tau \right. \\ & \left. + \int_0^{t-\frac{x}{c}} \int_0^{x+c(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau + \int_{t-\frac{x}{c}}^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau \right) \quad (4) \end{aligned}$$

הערה: בשום אופן לא מומלץ לזכור את הנוסחאות בעל פה. כדאי להכיר את העיקרון של הרחבה סימטרית בהתאם לתנאי השפה ומשם לשחזר צעד אחר צעד את $u(x, t)$.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. כלל המקבילית למשוואת הגלים ההומוגנית.
2. בעיות שטורם ליוביל, כולל פיתוח של פונקציה לטור של פונקציות עצמיות (לנוחיותכם קיים קובץ הרצאה 5.5 שמכיל את החומר הנדרש).
3. התכנסות במידה שווה ובמיוחד משפט הגזירה איבר איבר ומבחן ה- M של וירשטראס.

“ *Inequality is the cause of all local movements.*

”

Leonardo da Vinci