

הרצאה 4: משוואת הגלים, מיתר אינסופי דו צדדי הומוגני

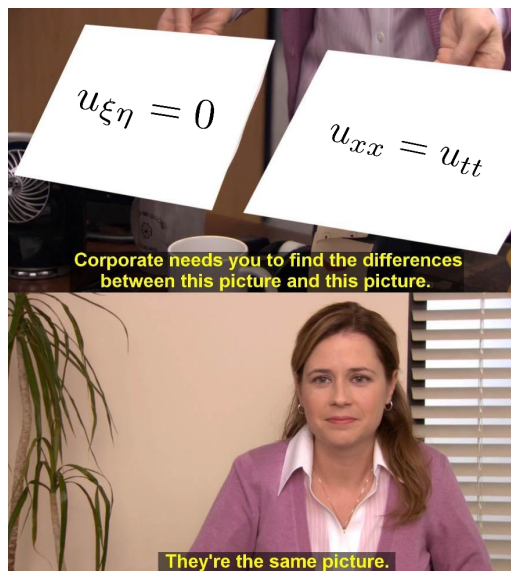
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	משוואת הגלים
2	1.1	משוואת הגלים, פתרון כללי וכלל המקבילית
5	1.2	מיתר אינסופי דו צדדי הומוגני



1 משוואת הגלים

1.1 משוואת הגלים, פתרון כללי וכלל המקבילית

היכרות עם משוואת הגלים

בפרק הזה נעסוק במשוואה הלינארית מסדר שני ההיפרבולית הבאה, שמכונה **משוואת הגלים**:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (1)$$

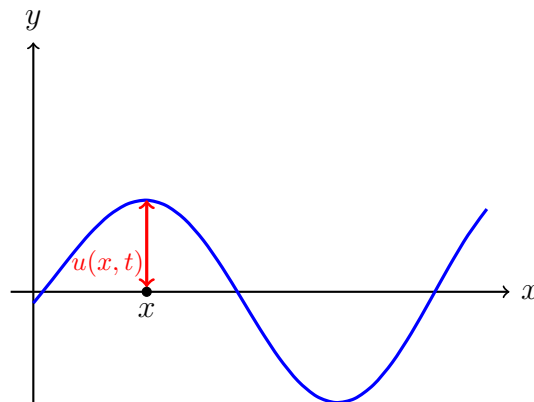
זו הגרסה ההומוגנית, ונדבר בהמשך גם על הגרסה האי-הומוגנית. בגלל המשמעות הפיזיקלית שלה, היא כתובה במשתנים x ו- t במקום x ו- y .

משוואת הגלים היא החוק הפיזיקלי ששולט בחוט שאין עליו כוחות אך יש לכל נקודה עליו איזושהי מהירות, כמו למשל מיתר של גיטרה. היא גם מייצגת קרינה אלקטרומגנטית (כמו אור), גלים בים, התפשטות של קול ועוד. אלו כל מיני תופעות שונות שמיוצגות על ידי אותה מד"ח (במימד המתאים).

אנחנו נתמקד במיתר או חוט מבחינת אינטואיציה ומוטיבציה. ליתר דיוק, מיתר גמיש. במיוחד, נדבר רק על מימד מרחבי אחד.

כדי לתאר את צורת המיתר בזמן מסוים, דרושה פונקציה $u(x)$ שמייצגת את הגובה של הנקודה שמתאימה ל- x על החוט.

היות שנרצה להבין את התפתחות הצורה עם הזמן, התיאור המלא הוא $u(x, t)$. זהו גובה הנקודה x בחוט בזמן t .



כלומר, אם נקבע $t = t_0$, אז הגרף של הפונקציה $y = u(x, t_0)$ הוא בדיוק צורת החוט בזמן t_0 . לכן $u_t(x, t)$ היא המהירות הרגעית של הנקודה x על החוט בזמן t . הערך $c > 0$ נקרא **מהירות התפשטות הגל** והוא ייחודי לחומר שממנו עשוי החוט, לעוביו וכן הלאה.

הערות:

- הערך u_{xx} הוא מדד להבדל בין הערך בנקודה לבין הערך הממוצע בסביבתה:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x, t) + u(x-\Delta x, t)}{2} - u(x, t)}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} u_{xx}(x, t)$$

לכן, מבחינה פיזיקלית, אם $u_{xx} > 0$ אז המיתר בנקודה x נמוך בממוצע מסביבתו, ונצפה לכוח שימשוך אותו כלפי מעלה.

מנגד, אם $u_{xx} < 0$ אז המיתר גבוה מסביבתו ונצפה לכוח שימשוך אותו כלפי מטה.

• הערך $u_t(x, t)$ שווה למהירות הנקודה x על המיתר בזמן t , ולכן $u_{tt}(x, t)$ שווה לתאוצה של נקודה זו בזמן t .

לפי החוק השני של ניוטון $\vec{F} = m \vec{a}$, התאוצה פרופורציונלית לכוח. לכן סביר שיתקיים $u_{tt} \propto u_{xx}$, וזו בדיקת משוואת הגלים ההומוגנית.

• הערך $u_x(x, t)$ שווה לשיפוע הגיאומטרי של המיתר בנקודה x בזמן t .

היות שמדובר במיתר גמיש, ה"שאיפה" הטבעית שלו היא $u_x = 0$ (להיות אופקי). דמיינו למשל מיתר באורך סופי שמוצג בעת מנוחה על ידי הקטע $[a, b]$. אורכו במנוחה $b - a$, ואם המיתר אינו אופקי אז הוא מתוח.

לכן u_x פרופורציונלי למתיחות המיתר בנקודה x בזמן t .

• מתברר שבכל התופעות, בהיעדר כוח חיצוני, מתקיים $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

• אם יש כוח חיצוני, יהיה חלק אי הומוגני. נדבר על כך בהמשך.

לא נתאר את הפיתוח של משוואת הגלים או מדוע היא אכן מייצגת התנהגות של גל (למעשה, לא רק בחוט אלא גם בחומר). זה יעשה בקורס מתאים בפיסיקה. אנחנו נתעסק בהבנת הפתרונות ומציאתם, חקירת תכונות שלהם ועוד.

פתרון כללי של משוואת הגלים ההומוגנית

כפי שאמרנו, מדובר במשוואה היפרבולית: $\Delta = -(-c^2) = c^2 > 0$. נמצא החלפת משתנים קנונית:

$$\dot{x} = \frac{\pm c}{1} \Rightarrow x = \pm ct + C \Rightarrow x \pm ct = C$$

לכן נגדיר $\xi = x + ct$ ו- $\zeta = x - ct$. נמיר למד"ח עבור $v(\xi, \zeta)$:

$$\begin{cases} u_t = v_\xi \cdot c + v_\zeta \cdot (-c) \Rightarrow u_{tt} = c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\zeta} + c^2 v_{\zeta\zeta}, \\ u_x = v_\xi + v_\zeta \Rightarrow u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\zeta} + v_{\zeta\zeta} \end{cases}$$

בסך הכל,

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\zeta} + c^2 v_{\zeta\zeta} - c^2 (v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\zeta} + v_{\zeta\zeta}) = -4c^2 v_{\xi\zeta}$$

כלומר, מתקבלת מד"ח פשוטה: $v_{\xi\zeta} = 0$, שיש לה פתרון כללי $v(\xi, \zeta) = F(\xi) + G(\zeta)$ בתנאי שהתחום במישור $\xi\zeta$ פשוט לפי שני הצירים.

הגדרה: יהי $c > 0$ ויהי $D \subset \mathbb{R}^2$ (כלומר, במישור xt) תחום.

נאמר שהתחום D תואם למשוואת הגלים עם מהירות גל c אם לכל $k \in \mathbb{R}$ מתקיים שהחתך של D עם הקו $x + ct = k$ הוא קשיר מסילתית, וגם החתך של D עם הקו $x - ct = k$ הוא קשיר מסילתית.

דוגמאות:

1. מישור xt כולו כמו גם חצי המישור העליון $t > 0$ תואמים למשוואת הגלים (לכל ערך של c).

2. כל מלבן וכל מקבילית, ובכלל כל **קבוצה קמורה** (קבוצה בה הקו הישר המחבר בין כל שתי נקודות בקבוצה, מוכל כולו בקבוצה) תואמים למשוואת הגלים (לכל ערך של c).

נחזור למשתנים המקוריים ונקבל את הפתרון הכללי של משוואת הגלים ההומוגנית עם מהירות גל c :

משפט 1: תהי $u(x, t)$ גזירה ברציפות פעמיים בתחום D אשר תואם למשוואת הגלים עם מהירות גל c .

אז $u(x, t)$ היא פתרון של משוואת הגלים ההומוגנית (1) בתחום D אם ורק אם קיימות פונקציות של משתנה יחיד F, G ממחלקה C^2 עבורן

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) \quad (2)$$

הפתרון צריך להיות C^2 בתוך תחום הגדרתו ולכן הפונקציות F, G צריכות להיות C^2 . המשמעות של הפתרון מעניינת.

נניח לרגע ש- $G(\zeta) \equiv 0$ כך ש- $u(x, t) = F(x + ct)$. זה אומר שצורת הגל בזמן t שווה לצורת הגל בזמן $t = 0$, בהיזה של ct יחידות שמאלה. כלומר, מבחינה חזותית, הגל "זז שמאלה במהירות c ". זה מכונה גל **נסוג**.

באופן דומה, אם $F(\xi) \equiv 0$ (אבל $G(\zeta)$ כלשהי), נקבל גל שזז ימינה במהירות c . זה מכונה גל **מתקדם**. הפתרון הכללי הוא **סופרפוזיציה של גל מתקדם וגל נסוג**.

דוגמאות של פתרונות ופתרונות מוכללים

דוגמאות:

1. הפונקציה

$$u(x, t) = \sin(x - 2t) + e^{x+2t}$$

היא פתרון של משוואת הגלים ההומוגנית.

2. הפונקציה $u(x, t) = (x + 5t)^2$ היא פתרון של משוואת הגלים ההומוגנית. מעניין להבחין שהיא קבועה על קווים ישרים מסויימים.

3. הפונקציה $u(x, t) = \cos(x + ct)$ היא פתרון של משוואת הגלים ההומוגנית. זהו למעשה גל נסוג בלבד.

4. הפונקציה $u(x, t) = |x + 5t|$ אינה פתרון של משוואת הגלים ההומוגנית, כי היא לא C^2 .

אם F או G אינן C^2 , מתקבלת $u(x, t)$ שאינה C^2 ולכן אינה פתרון.

הגדרה: יהי D תחום אשר תואם למשוואת הגלים עם מהירות גל $c > 0$. תהי $u(x, t)$ מוגדרת ב- D .

1. נאמר כי $u(x, t)$ הוא פתרון מוכלל של משוואת הגלים (1) אם קיימות שתי פונקציות F, G של משתנה יחיד עבורן $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ בכל D .

2. פתרון אמיתי (או קלאסי) ב- D הוא פתרון מוכלל אשר גזיר פעמיים ברציפות בכל D (כלומר, זהו פתרון רגיל).

פתרון מוכלל שאינו פתרון אמיתי נקרא פתרון לא אמיתי.

ההגיון הראשוני מאחורי ההתעסקות עם פתרונות לא אמיתיים הוא שמדובר בפונקציה שיש לה תכונות דומות לפתרונות אמיתיים, למרות ההבדל במידת הגזירות שלה.

כלל המקבילית

הגדרה: הקווים הישרים $x \pm ct = C$ מכונים הקווים האופייניים של משוואת הגלים.

אלו שתי משפחות (לא ניצבות!) של קווים ישרים, כאשר כל משפחה מכסה את כל המישור. הקווים הללו רלוונטיים לתכונות של הפתרונות.

התכונה הבאה מכונה **כלל המקבילית**.

משפט 2: יהי $u(x, t)$ פתרון של משוואת הגלים ההומוגנית בתחום $U \subset \mathbb{R}^2$. תהי $ABCD$ מקבילית אופיינית (כלומר, שכל צלעותיה מוכלות בקווים אופייניים) שמוכלת ב- U . אז

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$$

(סכום הערכים בקודקודים מנוגדים שווה.)

הערות:

- מתוכן ההוכחה אנו רואים שגם פתרונות מוכללים מקיימים את כלל המקבילית.
- אפשר להוכיח שפונקציה $u(x, y)$ מקיימת את כלל המקבילית אם ורק אם היא פתרון מוכלל של משוואת הגלים ההומוגנית.

מרחב זמן

במערכת הצירים שבה נשתמש, ציר ה- y יוחלף בציר הזמן t . זה לא תואם לנוהג במכניקה למשל, שם נהוג לשים את הזמן במקום ציר x . למערכת צירים כזו שבה ציר y מוחלף בציר t (ובמיוחד להכללה שלה לשלושה מימדים) קוראים **מרחב זמן**. על הקו האופייני בעל שיפוע חיובי במרחב זמן: $x - ct = k$, הגל המתקדם קבוע.

באופן דומה, על הקו אופייני $x + ct = k$ הגל הנסוג קבוע.

1.2 מיתר אינסופי דו צדדי הומוגני

בעית קושי למיתר אינסופי דו צדדי הומוגני

בסעיף זה נעסוק במיתר אינסופי דו-צדדי. כלומר, נתעניין בפתרונות $u(x, t)$ שמוגדרים עבור כל $x \in \mathbb{R}$ (ו- $t \geq 0$, כאשר $t = 0$ הוא המצב "בהתחלה"). במילים אחרות, נחפש פתרונות שמוגדרים בחצי המישור xt העליון.

באופן מדויק, נתעניין בבעית קושי הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3)$$

כלומר, בהנתן צורת הגל בזמן $t = 0$ והמהירות של כל נקודה על הגל בזמן זה, נרצה למצוא את צורת הגל בכל זמן $t > 0$.

פתרון אמיתי צריך לקיים את הדרישות הבאות:

1. ממחלקה C^2 עבור $t > 0$.

2. רציף עבור $t \geq 0$.

3. בגלל תנאי ההתחלה על u_t , נציב תנאי שגם $u_t(x, t)$ רציף עבור $t \geq 0$.

הערה: לעיתים דורשים $u \in C^1(\overline{D})$ אנחנו נסתפק בדרישה $u_t \in C(\overline{D})$.

פיתוח הפתרון לבעית קושי

יש לנו פתרון כללי ולכן אפשר לפתור. מספיק למצוא את $F(\xi)$ ו- $G(\zeta)$ כדי לדעת את $u(x, t)$ לכל זמן t .

נשתמש בתנאי ההתחלה כדי למצוא אותן: $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ ולכן

$$\begin{cases} f(x) = u(x, 0) = F(x) + G(x), \\ g(x) = u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) \end{cases}$$

כדי שנוכל למצוא את F, G , נגזור את המשוואה הראשונה ונקבל זוג משוואות עבור $F'(x)$ ו- $G'(x)$:

$$\begin{cases} f'(x) = F'(x) + G'(x), \\ \frac{1}{c}g(x) = F'(x) - G'(x) \end{cases}$$

לכן:

$$\begin{cases} F'(x) = \frac{f'(x)}{2} + \frac{1}{2c}g(x), \\ G'(x) = \frac{f'(x)}{2} - \frac{1}{2c}g(x) \end{cases}$$

לכן:

$$\begin{cases} F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + C, \\ G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + \tilde{C} \end{cases}$$

לבסוף, $F(x) + G(x) = f(x)$ ולכן $\tilde{C} = -C$. לכן קיבלנו אינסוף פתרונות אפשריים עבור F ו- G , אבל כולם מפיקים את אותו $u(x, t)$ שנכתוב במלואו מיד (כי הקבוע מתבטל). נניח אם כן בלי הגבלת הכלליות ש- $C = 0$, ונקבל:

הגדרה: הגל הנסוג והגל המתקדם עבור מיתר אינסופי הומוגני מוגדרים על ידי

$$\begin{cases} F(x + ct) = \frac{f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds, \\ G(x - ct) = \frac{f(x-ct)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds \end{cases}$$

בהתאמה.

נוסחת דלמבר ההומוגנית

השלמנו בכך את מרבית ההוכחה של המשפט הבא.

משפט 3: נניח ש- $f \in C^2(\mathbb{R})$ ו- $g \in C^1(\mathbb{R})$. אז לבעיית קושי (3) קיים פתרון יחיד שנתון על ידי נוסחת דלמבר (Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717 - 1783):

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

דוגמה: נמצא את הפתרון היחיד של הבעיה הבאה על מיתר אינסופי:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \\ u_t(x, 0) = \cos x \end{cases}$$

לפי נוסחת דלמבר,

$$u(x, t) = \frac{\sin(x - ct) + \sin(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \cos s ds = \frac{c+1}{2c} \sin(x + ct) + \frac{c-1}{2c} \sin(x - ct)$$

שימוש בנוסחת דלמבר כאשר לא מתקיימים התנאים $f \in C^2$ או $g \in C^1$ יניב פתרון מוכלל (לא אמיתי).

תחום ההשפעה ותחום התלות

אם אבי מדליק נורה לרגע אחד (הבזק אור) בנקודה x_0 בזמן $t = 0$, מי יוכל לראות את ההבזק ומתי? רואים מהפתרון שחצי מהעוצמה מתפשטת ימינה במהירות קבועה, וחצי שמאלה במהירות קבועה (במקרה תלת ממדי, ההתפשטות היא על פני ספירה). **תחום ההשפעה** של הנקודה x_0 הוא זוג הקווים האופייניים היוצאים מהנקודה $(x_0, 0)$: $x \pm ct = x_0$.

שאלה הפוכה: אם אורן עומד בנקודה x_0 בזמן t_0 , ממי יוכל לקבל מידע שנשלח בזמן $t = 0$? כלומר, מתוך תנאי ההתחלה, במה תלוי הערך $u(x_0, t_0)$ של הפתרון בנקודה (x_0, t_0) ?

מתוך נוסחת דלמבר רואים שהערך תלוי בערכי f בשתי נקודות, ובערכי g בין אותן שתי נקודות. בסך הכל, **תחום התלות** של (x_0, t_0) הוא הקטע $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. המשולש שנוצר (בסיסו הקטע הנ"ל, קודקוד (x_0, t_0)) $\Delta(x_0, t_0)$ מכונה **משולש אופייני**.

אם נחשוב על זה הפוך, על אילו נקודות (x, t) משפיעה הנקודה x_0 בזמן $t = 0$ (כלומר, הנקודה $(x_0, 0)$)? על אותן נקודות שהיא נופלת אצלן בתחום התלות. כלומר, אם $x - ct \leq x_0 \leq x + ct$. זהו קונוס שמכונה לעיתים **קונוס האור** והוא **תחום ההשפעה** של הנקודה x_0 .

דוגמה: מהו תחום ההשפעה של הקטע $[a, b]$ בזמן $t = 0$?

זהו איחוד כל קונוסי האור של נקודות בקטע.

העשרה

1. קישור לסרטון לגבי פיתוח פיסיקלי של משוואת הגלים.
2. קישור לסרטון לגבי מרחב זמן.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. פונקציות זוגיות ואי זוגיות ותכונותיהן (כולל תכונות של הנגזרות כשהן קיימות).
2. כלל לייבניץ לגזירה של אינטגרל עם פרמטר $\frac{d}{dy} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right)$.
3. תכונות של פונקציות זוגיות ואי זוגיות: ערכן בנקודה $x = 0$, אי זוגיות או זוגיות של הנגזרת.
4. חישוב של אינטגרל כפול על תחום לא מלבני בעזרת אינטגרלים נשנים עם גבולות אשר תלויים במשתנים.

“ The opposite of a correct statement is a false statement. But the opposite of a profound truth may well be another profound truth.

”

Niels Bohr