

הרצאה 3: מיון מד"ח לינאריות מסדר 2

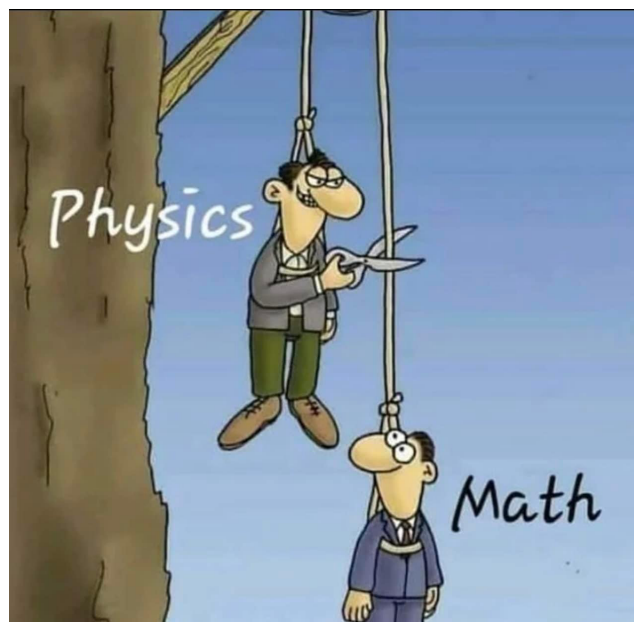
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	מיון מד"ח לינאריות מסדר 2
2	1.1	הגדרות וסיווג עבור מד"ח לינאריות מסדר 2
4	1.2	צורה קנונית וקואורדינטות אופייניות



1 מיון מד"ח לינאריות מסדר 2

1.1 הגדרות וסיווג עבור מד"ח לינאריות מסדר 2

הגדרות וסימונים עבור מד"ח לינאריות מסדר 2

בניגוד למשוואות מסדר ראשון, אנחנו נעסוק אך ורק במשוואות לינאריות מסדר שני. אנחנו נראה שיש שלושה סוגים עיקריים של מד"ח מסדר שני, שמסווגות לפי דמיון לאחת משלוש המד"ח הבאות בהתאמה: משוואת הגלים (משוואות היפרבוליות), משוואת החום (משוואות פרבוליות) ומשוואת לפלס (משוואות אליפטיות).

לאחר שנבין את הסיווג ואת משמעותו, נקדיש את שאר העיסוק במד"ח בחקירה והבנה של כל אחת משלוש המשוואות היסודיות הנ"ל.

הגדרה: משוואה דיפרנציאלית חלקית לינארית מסדר שני בתחום $D \subset \mathbb{R}^2$ היא משוואה מהצורה

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y + f(x, y) u = F(x, y) \quad (1)$$

כאשר לפחות אחת מבין הפונקציות $a(x, y)$, $b(x, y)$ או $c(x, y)$ אינה זהותית אפס בתחום D .

1. הביטוי $a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy}$ מכונה החלק העיקרי של המד"ח.

2. הפונקציה $F(x, y)$ מכונה החלק האי הומוגני.

אם $F(x, y) \equiv 0$ בתחום D נאמר שהמד"ח הומוגני, ואחרת נאמר שהיא אי הומוגנית.

3. נסמן $L[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu$. זה מכונה האופרטור הדיפרנציאלי של המד"ח.

כדאי לשים לב למקדם 2 לפני $b(x, y)$, שמוצב שם כמוסכמה בקורס מטעמי נוחות.

דוגמאות:

1. $u_{xx} - u_{xy} = u_x - x$. במקרה הזה, $a \equiv 1$ ו- $b \equiv -\frac{1}{2}$. נציין בנוסף ש- $c \equiv 0$ ו- $d \equiv -1$ (ויש עוד מקדמים שלא ציינו).

2. $2u_{xx} + xu_{xy} - yu_{yy} = 0$. זו מד"ח הומוגנית. כאן $b = \frac{x}{2}$.

בדוגמאות הנ"ל החלק העיקרי הוא $u_{xx} - u_{xy}$ ו- $2u_{xx} + xu_{xy} - yu_{yy}$ בהתאמה.

הגדרה של סוגי מד"ח לינאריות מסדר 2

סוג המשוואה נקבע על פי החלק העיקרי שלה, באופן הבא:

הגדרה: הדיסקרימיננטה של המשוואה (1) בנקודה (x, y) היא

$$\Delta(x, y) = b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y)$$

סוג המד"ח יקבע לפי הסימן של $\Delta(x, y)$. באופן זה, מד"ח לינאריות מסדר 2 ממוינות לשלוש מחלקות: המחלקה של משוואת הגלים, המחלקה של משוואת החום, והמחלקה של משוואת לפלס.

הגדרה: נאמר כי:

- המד"ח היפרבולית בנקודה (x, y) אם $\Delta(x, y) > 0$.
- המד"ח פרבולית בנקודה (x, y) אם $\Delta(x, y) = 0$.
- המד"ח אליפטית בנקודה (x, y) אם $\Delta(x, y) < 0$.

נאמר שהמד"ח היפרבולית בתחום D אם היא היפרבולית בכל נקודה בתחום. כנ"ל עבור פרבולית ואליפטית.

דוגמאות:

1. $u_{xx} - u_{xy} = u_x - x$. כאן $\Delta(x, y) \equiv \frac{1}{4} - 1 \cdot 0 > 0$ (דיסקרימיננטה קבועה) ולכן המד"ח היפרבולית בכל המישור.
2. $2u_{xx} + xu_{xy} - yu_{yy} = 0$. כאן $\Delta(x, y) = \frac{x^2}{4} + 2 \cdot y$ ולכן המד"ח היפרבולית בתחום $y > -\frac{x^2}{8}$ ואליפטית בתחום $y < -\frac{x^2}{8}$. אין תחום שבו המד"ח פרבולית, אך היא פרבולית על העקום $y = -\frac{x^2}{8}$.
3. משוואת הגלים: $u_{xx} - k^2 u_{yy} = 0$. כאן $\Delta = k^2 > 0$ ולכן זו משוואה היפרבולית בכל המישור.
4. משוואת החום: $u_x - k^2 u_{yy} = 0$. כאן $\Delta \equiv 0$ ולכן זו משוואה פרבולית בכל המישור.
5. משוואת לפלס: $u_{xx} + u_{yy} = 0$. כאן $\Delta \equiv -1 < 0$ ולכן זו משוואה אליפטית בכל המישור.

שלוש הדוגמאות האחרונות הן, כפי שנראה, אב-טיפוס של כל סוג של מד"ח לינארית מסדר שני. הן שלוש המשוואות שנדבר עליהן בהרחבה.

דוגמה מקדימה לאינווריאנטיות של סוג המד"ח

סוג המד"ח חשוב היות שהוא נשמר תחת החלפת משתנים. מיד ננסח ונוכיח משפט מדויק, אך קודם נראה בדוגמה.

דוגמה: נתונה המד"ח:

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$$

נבדוק את סוגה:

$$\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 = -\frac{7}{4} < 0$$

לכן היא אליפטית בכל המישור.

נחליף משתנים ל-

$$\begin{cases} s = 2y - 3x, \\ t = \sqrt{7}x \end{cases}$$

נקבל

$$\begin{cases} u_{xx} = 9v_{ss} - 6\sqrt{7}v_{st} + 7v_{tt}, \\ u_{xy} = -6v_{ss} + 2\sqrt{7}v_{st}, \\ u_{yy} = 4v_{ss} \end{cases}$$

לבסוף נציב למד"ח:

$$0 = 7(v_{ss} + v_{tt}) - v_s + \sqrt{7}v_t$$

נציין שקיבלנו חלק עיקרי שזהה למשוואת לפלס, כלומר, אליפטית בכל המישור גם לאחר השינוי.

סוג המד"ח אינווריאנטי להחלפת משתנים

המשפט הבא הוא החלק הראשון בבסיס לכך שמספיק לחקור מד"ח אחת מכל סוג (לפחות להרבה צרכים). החלק השני בבסיס לכך שמספיק לחקור מד"ח אחת מכל סוג יהיה משפט שיגיד שכל מד"ח היפרבולית ניתנת להבאה למד"ח שהחלק העיקרי שלה זהה למשוואת הגלים (ליתר דיוק, בדרך כלל נביא אותה לצורה פשוטה עוד יותר), וכנ"ל עבור פרבולי (עם משוואת החום) ואליפטי (עם משוואת לפלס).

משפט 1: החלפת משתנים הפיכה, גזירה ברציפות פעמיים ועם יעקוביאן שונה מאפס בכל נקודה אינה משנה את סוג המשוואה.

1.2 צורה קנונית וקואורדינטות אופייניות

כל מד"ח לינארית מסדר 2 ניתנת להעברה לצורה קנונית

ראינו שבהנתן מד"ח לינארית מסדר שני, כל החלפת משתנים סבירה תשמר את סוגה של המד"ח. נראה כעת שלכל אחד משלושת הסוגים יש צורה קנונית, כלומר, גרסה עם חלק עיקרי פשוט במיוחד שמתאימה לאותו סוג של מד"ח (היפרבולי, פרבולי או אליפטי) ושתמיד ניתן להגיע אליה על ידי החלפת משתנים.

במשפט הבא נסמן החלפת משתנים בסימון הרגיל

$$\begin{cases} s = s(x, y), \\ t = t(x, y) \end{cases},$$

$$v(s, t) = u(x(s, t), y(s, t)) \text{ וכן}$$

משפט 2:

1. אם המד"ח (1) היפרבולית ומקדמי החלק העיקרי גזירים ברציפות בסביבת הנקודה (x_0, y_0) , אז יש סביבה של הנקודה שבה המד"ח ניתנת להבאה על ידי החלפת משתנים הפיכה, גזירה ברציפות פעמיים ובעלת יעקוביאן שונה מאפס למד"ח לינארית מסדר שני עם חלק עיקרי v_{st} :

$$v_{st} + D(s, t)v_s + E(s, t)v_t + G(s, t)v = H(s, t)$$

2. אם המד"ח (1) פרבולית בסביבת הנקודה (x_0, y_0) , כנ"ל עם חלק עיקרי v_{ss} .

3. אם המד"ח (1) אליפטית ומקדמיה אנליטיים (ניתנים לפיתוח לטורי חזקות) בסביבת הנקודה (x_0, y_0) , כנ"ל עם חלק עיקרי $v_{ss} + v_{tt}$.

הצורה שמצוטטת בכל סעיף מכונה הצורה הקנונית של מד"ח מאותו סוג.

הוכחת המשפט היא קונסטרוקטיבית: היא מפרטת את אופן מציאת החלפת המשתנים הנחוצה. המשתנים הללו מכונים קואורדינטות אופייניות. אנחנו נפרט את ההוכחה למקרה ההיפרבולי, ובמקרה האליפטי והפרבולי רק נספר על אופן מציאת הקואורדינטות האופייניות.

מציאת משתנים אופייניים

ניעזר בסימונים של ההוכחה הקודמת, ונניח בלי הגבלת הכלליות ש- $a(x, y) \neq 0$ בסביבת (x_0, y_0) (אם $a(x, y) = c(x, y) \equiv 0$ אז צורת המד"ח כבר היפרבולית קנונית). השחקן המרכזי הוא המד"ח האופיינית

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a} \quad (2)$$

1. במקרה ההיפרבולי, $\Delta > 0$ ולכן המד"ח (2) היא למעשה שתי מד"ר.

פותרים את שתיהן ומציגים את הפתרונות הכלליים כך:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = c \\ \psi(x, y) = k \end{cases}$$

ואז מגדירים $s = \varphi(x, y)$ ו- $t = \psi(x, y)$.

2. במקרה הפרבולי נרצה שיתקיים $B \equiv C \equiv 0$. הדרישה $C \equiv 0$ מובילה לאותה מד"ר (2) עם $\Delta = 0$ ולכן מדובר במד"ר אחת.

נציין כי $\Delta \equiv 0$, $C \equiv 0$ גוררים כי $B \equiv 0$.

פותרים אותה ומציגים את הפתרון הכללי בצורה $\varphi(x, y) = c$.

מגדירים $t = \varphi(x, y)$ ואת s מגדירים בכל אופן שנרצה בתנאי שההחלפה המתקבלת הפיכה ועם יעקוביאן שלא מתאפס.

3. אם המד"ח אליפטית, $\Delta < 0$: עם אותה דרישה כמו במקרה ההיפרבולי ($A \equiv C \equiv 0$), נקבל

$$y' = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}$$

פותרים את ה-+ (מתייחסים ל- i בתור קבוע) ומקבלים פתרון כללי מרוכב. כותבים אותו כך:

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c$$

ואז מגדירים $s = \varphi(x, y)$ ו- $t = \psi(x, y)$.

נעיר שאפשר לפתור גם עם ה-- , זה לא משנה.

בכל המקרים, המשתנים שמגדירים מכונים קואורדינטות אופייניות.

דוגמאות של מציאת קואורדינטות אופייניות

דוגמאות:

1. ניקח דוגמה שכבר ראינו:

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$$

ראינו שזו משוואה אליפטית עם $\Delta \equiv -\frac{7}{4} < 0$. נמצא קואורדינטות אופייניות.

לפי השיטה שתוארה, יש לפתור:

$$y' = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i}{1} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

זה פשוט:

$$y = \left(\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i \right) x + C$$

לכן הפתרון הכללי ניתן לתיאור כך:

$$(2y - 3x) \mp \sqrt{7}xi = C$$

כלומר, נבחר $s = 2y - 3x$ ו- $t = \sqrt{7}x$

2. ננסה לפתור את הבעיה הבאה על ידי מעבר לצורה קנונית:

$$\begin{cases} x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0, & x, y > 0, \\ u(1, y) = y^2, & y > 0, \\ u(2, y) = \sin y & y > 0 \end{cases}$$

נסווג את המד"ח: $\Delta = x^2 y^2 - x^2 y^2 \equiv 0$ ולכן המד"ח פרבולית. נמצא את $t(x, y)$:

$$y' = \frac{xy}{x^2} = \frac{y}{x}$$

נקבל:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + C$$

לכן $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = C$, או $\frac{y}{x} = c$. נבחר משתנים $s = x$, $t = \frac{y}{x}$.

צריך לבדוק שההחלפה הפיכה, גזירה ברציפות, יעקוביאן שונה מאפס בתחום. נשאיר את זה לבדיקה עצמית, זה פשוט.

לאחר העברה יתקבל $v_{ss} = 0$ ולכן $v(s, t) = sF(t) + G(t)$. נחזור ל- x, y :

$$u(x, y) = xF\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right)$$

אם נציב את התנאים הנלווים נקבל:

$$u(x, y) = x \sin\left(\frac{2y}{x}\right) - \frac{y^2}{x} + \frac{2y^2}{x^2} - \sin\left(\frac{2y}{x}\right)$$

3. נתונה המד"ח

$$3u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} = 0.$$

נסווג אותה: $\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot (-2) = \frac{25}{4} > 0$. לכן המד"ח היפרבולית.

נעבור לצורה קנונית. לצורך כך נפתור את המד"ר האופיינית

$$y' = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}}{3} = \frac{2}{3}, -1 \iff y = \frac{2x}{3} + C, -x + C$$

לכן נגדיר החלפת משתנים

$$\begin{cases} s = 3y - 2x \\ t = y + x \end{cases}$$

עבורה

$$\begin{cases} u_{xx} = 4v_{ss} - 4v_{st} + v_{tt} \\ u_{yy} = 9v_{ss} + 6v_{st} + v_{tt} \\ u_{xy} = -6v_{ss} + v_{st} + v_{tt} \end{cases}$$

לכן נקבל את המד"ח

$$0 = 3u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} = 3(4v_{ss} - 4v_{st} + v_{tt}) - (-6v_{ss} + v_{st} + v_{tt}) - 2(9v_{ss} + 6v_{st} + v_{tt})$$

קיבלנו לכן מד"ח קנונית

$$v_{st} = 0$$

הפתרון שלה הוא $v(s, t) = F(s) + G(t)$ ולכן נקבל פתרון כללי

$$u(x, y) = F(3y - 2x) + G(y + x)$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. החוק השני של ניוטון (לא חובה, אבל מועיל לאינטואיציה).
2. קונס האור בתורת היחסות הפרטית (לא חובה, אבל מועיל לאינטואיציה).

“ It’s the questions we can’t answer that teach us the most. They teach us how to think. If you give a man an answer, all he gains is a little fact. But give him a question and he’ll look for his own answers (...) That way, when he finds the answers, they’ll be precious to him. The harder the question, the harder we hunt. The harder we hunt, the more we learn.

”

Patrick Rothfuss, The Wise Man’s Fear