

הרצאה 2: שיטת הקווים האופייניים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

1	מד"ח מסדר 1 (המשך)	2
1.1	שיטת האופייניים	2
1.2	תנאי החיתוך	4
1.3	משפט הקיום והיחידות למד"ח קוואזי לינארית	5



1 מד"ח מסדר 1 (המשך)

1.1 שיטת האופיינים

בעיית קושי עבור מד"ח קוואזי לינארית מסדר 1

בעיית קושי שנעסוק בה עבור המד"ח הקוואזי-לינארית (2) היא הבעיה הבאה, שבה נתונים ערכי $u(x, y)$ על עקום. נניח שנתון עקום שמכונה **קו התחלה** (מסיבות שיובהרו מיד):

$$\Gamma = \{(f(s), g(s), h(s)) \mid s \in I\}$$

נרצה למצוא משטח פותר שמכיל את עקום ההתחלה Γ , כלומר, פתרון $u(x, y)$ של המד"ח כך ש-

$$u(f(s), g(s)) \equiv h(s)$$

לעיתים נכון להצלחה על כל עקום ההתחלה Γ , ולעיתים לסביבה של נקודה אחת על העקום שמעניינת אותנו שמיוצגת על ידי s_0 , כלומר הנקודה $(f(s_0), g(s_0), h(s_0))$.

ההבחנה בסימון של הפרמטר בין עקום התחלה לקו אופייני (s אל מול t) חשובה כדי לעקוב אחרי תהליך הבנייה של הפתרון.

הערה: זהירות - לא כל קו שמוכל במשטח פותר הוא קו אופייני.

דוגמה ראשונה לפתרון בשיטת האופיינים

נחפש פתרון לבעיית קושי הבאה:

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1, \\ u(x, x) = \frac{1}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

התנאי הנלווה שקול לכך שהמשטח הפותר יכיל את העקום

$$\Gamma = \left\{ \left(s, s, \frac{1}{2}s \right) \mid s \in [0, 1] \right\}$$

הרעיון: דרך כל נקודה על Γ עובר קו אופייני יחיד של המד"ח $uu_x + u_y = 1$. נאחד את כל הקווים הללו ונקבל את המשטח היחיד שמכיל את Γ ויש לו סיכוי להיות משטח פותר.

לצורך כך נמצא ראשית את כל הקווים האופייניים. עשינו את זה בדיוק בפעם שעברה, והם:

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}t^2 + C_3t + C_1, t + C_2, t + C_3 \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

אופן המחשבה הוא: לכל s (שמייצגת נקודה על עקום ההתחלה Γ), נמצא קו אופייני העובר בנקודה שמתאימה ל- s על Γ : $(s, s, \frac{1}{2}s)$, בזמן $t = 0$. במובן הזה הנקודות על Γ הן נקודות התחלתיות של הקווים האופייניים.

כמובן שלכל s שונה נקבל קו אופייני אחר, כלומר, הקבועים C_1, C_2, C_3 שמבדילים בין הקווים האופייניים יהיו תלויים ב- s . אנחנו מחפשים, לכל s נתון, קו אופייני שנשמך $(x(s, t), y(s, t), u(s, t))$, שעובר בנקודה

בזמן $t = 0$ כלומר: $(s, s, \frac{1}{2}s)$

$$\begin{cases} x(s, t) = \frac{1}{2}t^2 + C_3(s)t + C_1(s); & x(s, 0) = s, \\ y(s, t) = t + C_2(s); & y(s, 0) = s, \\ u(s, t) = t + C_3(s); & u(s, 0) = \frac{1}{2}s \end{cases}$$

נקבל מכך כי

$$\begin{cases} x(s, t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s, \\ y(s, t) = t + s, \\ u(s, t) = t + \frac{1}{2}s \end{cases}, \quad s \in [0, 1]; t \in \mathbb{R}$$

זהו גוף דו-פרמטרי במרחב, כלומר, משטח. נותר לוודא שהמשטח הוא גרף של פונקציה ולמצוא את הפונקציה.

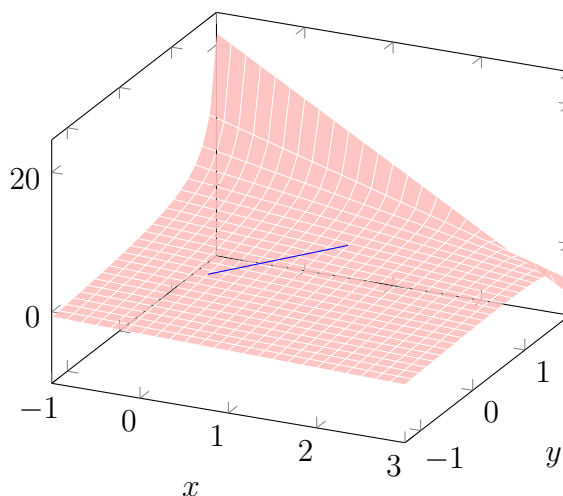
ואכן, נחלץ את (s, t) מתוך שתי השורות הראשונות ונציב לשלישית. נקבל

$$u(x, y) = t + \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}y + \frac{x - y}{y - 2}$$

בחישובים חשוב ש- $y \neq 2$, וזה אכן כך בסביבת עקום ההתחלה.

הפתרון אינו מוגדר בכל המישור, אבל הנה תחום שבו הוא מוגדר, ושבנו הוא אכן מכיל את קו ההתחלה:

$$D = \{(x, y) \mid y < 2\}$$



מה קורה על $y = 2$? יש קווים אופייניים שונים שיוצאים מקו ההתחלה שהיטליהם נחתכים. לכן יש סתירה בהגדרת u .

סיכום שיטת האופייניים

נניח שנתונה בעיית קושי עבור מד"ח קוואזי לינארית מסדר ראשון:

$$\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \\ u(f(s), g(s)) = h(s) \end{cases} \quad s \in I \quad (1)$$

כאשר $I \subset \mathbb{R}$ קטע.

1. נפתור את מערכת המד"ר עם פרמטר s , לכל $s \in I$ (או לכל s בסביבת נקודה $s_0 \in I$):

$$\begin{cases} \frac{\partial x(s,t)}{\partial t} = a(x(s,t), y(s,t), u(s,t)), & x(s,0) = f(s), \\ \frac{\partial y(s,t)}{\partial t} = b(x(s,t), y(s,t), u(s,t)), & y(s,0) = g(s), \\ \frac{\partial u(s,t)}{\partial t} = c(x(s,t), y(s,t), u(s,t)), & u(s,0) = h(s) \end{cases}$$

הפירוש כאמור הוא שלכל נקודה על קו ההתחלה, אנו מוצאים קו אופייני של המד"ח אשר עובר בנקודה זו.

הפתרון הוא קו אופייני עם פרמטר $s, \Gamma_{s,t}$, כלומר $(x(s,t), y(s,t), u(s,t))$.

2. מחלצים (אם ניתן) את s, t כפונקציות של x, y מתוך המערכת

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \end{cases}$$

התוצאה היא שתי פונקציות $s(x, y), t(x, y)$.

3. מציבים את החילוץ אל תוך $u(s, t)$ ומקבלים את הפתרון, כלומר

$$u(x, y) = u(s(x, y), t(x, y))$$

4. רשות: בודקים כי $u(x, y)$ אכן פתרון של בעית קושי (1) (הצבה למד"ח ולתנאי הנלווה).

1.2 תנאי החיתוך

מוטיבציה לתנאי החיתוך

נניח שנתונה משוואה דיפרנציאלית חלקית קוואזי-לינארית מסדר ראשון:

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u) \quad (2)$$

ראינו בדוגמה האחרונה שיש מקום אחד אפשרי לתקלות בשיטת האופיינים. אנחנו צריכים להיות מסוגלים לחלץ את s, t כפונקציות של x, y מתוך מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x = x(s, t), \\ y = y(s, t) \end{cases}$$

גם אם מבחינה מעשית זה יכול להיות קשה בדוגמאות מסוימות, יש לנו את משפט הפונקציות ההפוכות (או משפט הפונקציות הסתומות) כדי לבדוק אם לפחות זה "אפשרי תאורטית", כלומר, כדי לבדוק אם התיאור הדו-פרמטרי שמצאנו (איחוד הקווים האופייניים) הוא גרף של פונקציה גזירה ברציפות.

נקבע איזשהו ערך s_0 . לפי משפט הפונקציות הסתומות, כדי שהמשטח יהיה גרף של פונקציה בסביבת $s = s_0$ ו- $t = 0$ (כלומר, בסביבת הנקודה $(x_0, y_0) = (f(s_0), g(s_0))$), מספיק ש- $x(s, t)$ ו- $y(s, t)$ תהיינה גזירות ברציפות ושהיעקוביאן לא יתאפס:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s_0, 0) & \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, 0) \\ \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, 0) & \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, 0) \end{vmatrix} \neq 0$$

זה קל לבדיקה ברגע שמצאנו את $x(s, t)$ ו- $y(s, t)$.

ומיד נראה נס: אפשר לבדוק את זה מראש לפני כל החישובים!

ביטוי מפתיע ליעקוביאן

למה 1: נניח כי המקדמים $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$, $c(x, y, u)$ של המשוואה (2) הם גזירים ברציפות בסביבת הנקודה (x_0, y_0, u_0) . יהי Γ עקום התחלה בעל פרמטריזציה גזירה ברציפות $(f(s), g(s), h(s))$ ויהי s_0 ערך של הפרמטר כך ש-

$$(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) = (x_0, y_0, u_0)$$

אז

$$J = \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0, y_0, u_0) & b(x_0, y_0, u_0) \end{vmatrix} \quad (3)$$

תנאי החיתוך

הביטוי המפתיע הזה ליעקוביאן, שלא תלוי כלל בזה שכבר מצאנו את הקווים האופייניים אלא רק במקדמים של בעיית קושי, מאפשר לבדוק מראש אם שיטת האופייניים תעבוד לפני שמתחילים לפתור. בהתאם לכך:

הגדרה: נאמר שמתקיים **תנאי החיתוך** (קרוי גם **תנאי הטרנסוורסליות**) אם

$$\begin{vmatrix} a(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) & b(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \\ f'(s_0) & g'(s_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4)$$

מעניין להבחין בפירוש הגיאומטרי הפשוט של תנאי החיתוך: (f', g') צריך לא להיות מקביל ל- (a, b) . כלומר, ההיטל של קו ההתחלה צריך לא להתנהג כמו קו אופייני. במובן הזה, תנאי החיתוך הוא תנאי חזק יותר מהתנאי: קו ההתחלה אינו אופייני.

1.3 משפט הקיום והיחידות למד"ח קוואזי לינארית

משפט קיום ויחידות לבעיית קושי עבור מד"ח קוואזי לינארית מסדר 1

נסכם את כל הרעיונות למשפט קיום ויחידות.

משפט 2: נניח כי המקדמים $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$, $c(x, y, u)$ של המשוואה (2) הם גזירים ברציפות בסביבת הנקודה (x_0, y_0, u_0) . יהי Γ עקום התחלה בעל פרמטריזציה גזירה ברציפות $(f(s), g(s), h(s))$ ויהי s_0 ערך של הפרמטר כך ש-

$$(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) = (x_0, y_0, u_0)$$

נניח שמתקיים **תנאי החיתוך** (4) בנקודה $s = s_0$:

$$\begin{vmatrix} a(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) & b(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \\ f'(s_0) & g'(s_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

אז קיים פתרון יחיד של המד"ח (2) בסביבה של (x_0, y_0) אשר מכיל את Γ בסביבת s_0 :

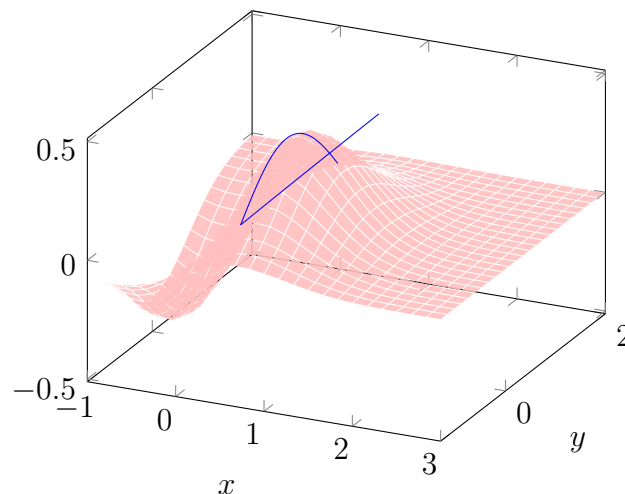
$$u(f(s), g(s)) \equiv h(s) \quad \text{לכל } s \text{ בסביבת } s_0$$

وهو מתקבל בשיטת הקווים האופייניים.

ראינו כבר את כל רעיון ההוכחה של הקיום. הפרטים היחידים שלא התייחסנו אליהם הם $x(s, t)$ ו- $y(s, t)$ תמיד גזירות ברציפות, וזה מתקבל ממשפט היציבות במד"ר; ויחידות. נוכיח את היחידות.

הערה: זהירות - יתכן כי $u(x, y)$ לא מכיל את Γ באף סביבה של הנקודה $(f(s_0), g(s_0), h(s_0))$. האם זה לא עומד בסתירה למשפט?

חשוב להבחין שיתכן שקיים ערך אחר $s_1 \neq s_0$ של הפרמטר שעבורו העקום שוב עובר באותה נקודה (x_0, y_0, u_0) . במקרה כזה, יתכן שעקום ההתחלה Γ אינו מוכל במשטח הפותר בסביבה של s_1 . כלומר, זה לא נכון לומר שכל עקום ההתחלה בסביבת (x_0, y_0, u_0) מוכל בהכרח במשטח הפותר, אלא רק החלק ממנו שמתאים לערכי הפרמטר s שקרובים ל- s_0 .



כישלון תנאי החיתוך

מה קורה אם תנאי החיתוך נכשל?

המשמעות של $J = 0$ היא שההיטל של Γ תואם לקו אופייני בנקודה s_0 . במקרה כזה יש שתי אפשרויות נפרדות ושונות מהותית. אם Γ לא תואם לקו אופייני בנקודה s_0 (אלא רק ההיטל תואם), אז לא יהיה פתרון שמכיל את Γ באף סביבה של s_0 .

משפט 3: אם תנאי החיתוך נכשל בנקודה s_0 ובנוסף למטריצה

$$\begin{pmatrix} a(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) & b(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) & c(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \\ f'(s_0) & g'(s_0) & h'(s_0) \end{pmatrix} \quad (5)$$

יש דרגה מלאה (כלומר, 2), אז אין אף משטח פותר שמכיל את Γ (באף סביבה של s_0).

התנאי על דרגת המטריצה הוא סתם דרך אחרת לומר שלא מתקיים $\vec{\gamma} \parallel (a, b, c)$.

אם קו ההתחלה אינו קו אופייני, אז נניח שהוא מוכל במשטח פותר. נבחר נקודה על קו ההתחלה ונוציא ממנה קו אופייני L . זה לא יהיה Γ , שאינו אופייני. לפי משפט, L מוכל במשטח הפותר. אבל מכיוון שיש ל- L את אותו היטל, סימן שיש ערכי z שונים עבור אותם ערכי x, y . כלומר, המשטח אינו גרף של פונקציה. לכן לא יתכן פתרון. זו לא הוכחה מדויקת, אלא רק רעיון. הביטוי "היטל כשל קו אופייני" אינו

מדויק ובאמת לאו דווקא לכל קו אופייני שחותך את Γ יהיה בדיוק את אותו היטל, כי ככל שערכי ה- z מתרחקים כך משוואות אופייניים נראות שונה, גם בשני הרכיבים הראשונים. אם המשוואה היא לינארית אז הביטוי דווקא מדויק. בכל אופן, את המקרה הזה נוכיח במדויק ללא גיאומטריה.

אם Γ תואם לאופייני בנקודה s_0 (דרגת המטריצה המורחבת במשפט האחרון קטנה מ-2) אז זה יותר מסובך. צריך ממש לבדוק באופן פרטני.

כלל אצבע שכדאי לזכור הוא שאם תנאי החיתוך נכשל ודרגת המטריצה המורחבת היא קטנה מ-2 לכל s **בקטע שלם** אז יש אינסוף פתרונות שמכילים את המקטע המתאים של Γ . מבחינה אינטואיטיבית, אם Γ כולו אופייני אז אפשר לחבר אליו קווים אופייניים אחרים באינסוף דרכים וכך לקבל אינסוף משטחים פותרים שמכילים אותו. אבל זהירות, זהו רק כלל אצבע שאינו תמיד נכון.

הערה: בקורס זה לא נעסוק ולא נטפל במקרים שבהם יש נקודה בודדת שבה תנאי החיתוך נכשל ודרגת המטריצה אינה מלאה.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. כלל השרשרת לגזירה של ביטוי מורכב במספר משתנים כמו למשל $v(s(x, y), t(x, y))$.

מומלץ להעיף מבט גם בייצוג המטריצי של כלל השרשרת.

2. יעקוביאן של טרנספורמציה $x(s, t), y(s, t)$.

“ Practice, (...) and luck. The less you have of the first, the more you need the second.

”

Brandon Sanderson, Yumi and the Nightmare Painter