

הרצאה 1: מבוא למד"ח, קווים אופייניים

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	מד"ח מסדר 1
2	1.1	מבוא למד"ח מסדר 1
5	1.2	מד"ח לינאריות וקוואזי לינאריות מסדר 1
7	1.3	קווים אופייניים
9	1.4	משטחים פותרים מורכבים מקווים אופייניים



1 מד"ח מסדר 1

1.1 מבוא למד"ח מסדר 1

דוגמה מקדימה של מד"ח בהשוואה

משוואות דיפרנציאליות חלקיות, בדומה למשוואות דיפרנציאליות רגילות, הן משוואות שבהן הנעלם הוא פונקציה. בניגוד למשוואות דיפרנציאליות רגילות, שבהן הנעלם היה פונקציה $y(x)$ של משתנה אחד, במשוואות דיפרנציאליות חלקיות הנעלם הוא פונקציה $u(x, y)$ של שני משתנים (או יותר: $u(x, y, z)$ וכו'). במקרים מסובכים יותר, יכולות להופיע אף מספר פונקציות נעלמות במשוואה אחת.

דוגמה: משוואה דיפרנציאלית חלקית מאוד פשוטה: $u_x = xu$.

כלומר, $u = u(x, y)$ פתרון בתחום $D \subset \mathbb{R}^2$ אם לכל $(x, y) \in D$ מתקיים ש-

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = xu(x, y)$$

זו משוואה דיפרנציאלית חלקית **לינארית** (כי u ו- u_x מופיעות "בצורה לינארית") **מסדר ראשון** (כי סדר הנגזרת הגבוה ביותר של u שמופיע במשוואה הוא 1).

זו גם דוגמה נדירה של מד"ח שניתן לפתור יחסית בקלות, ונעשה זאת כעת. הסיבה לכך שניתן לפתור אותה בעזרת הכלים שיש לנו כבר עכשיו היא בעיקר שאין שום גזירה לפי y , רק לפי x .

זה אומר שלכל y קבוע, המד"ח היא בעצם משוואה דיפרנציאלית רגילה: $u(x, y)$ (כפונקציה של משתנה אחד x , כאשר y קבוע) הוא פתרון של המד"ח $u' = xu$.

הפתרון הכללי של המד"ח $u' = xu$ הוא $u = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ ולכן לכל y צריך להיות קבוע C (קבוע מבחינת x , אך יכול להיות תלוי ב- y) כך ש-

$$u(x, y) = C(y)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

זהו הפתרון הכללי של המד"ח $u_x = xu$. מעניין לשים לב שיש אינסוף דרגות חופש בהשוואה למד"ח. בעצם, יש דרגת חופש של פונקציה אחת (במקום קבוע). לכן בדוגמה הזו כדי לקבוע פתרון יחיד יש צורך באינסוף תנאים נלווים. נראה שבאופן כללי נזדקק באופן טבעי למידע על $u(x, y)$ לאורך קו על מנת לקבוע פתרון יחיד, ובאופן כללי יותר אם סדר המשוואה גדול מ-1 נזדקק למספר פיסות מידע כאלה.

הגדרה של מד"ח מסדר 1

הגדרה: משוואה דיפרנציאלית חלקית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0 \quad (1)$$

כאשר $F(x, y, v, w, z)$ פונקציה של חמישה משתנים אשר תלויה לפחות באחד מבין המשתנים w, z .

למשל, בדוגמה הנ"ל $F(x, y, v, w, z) = w - xv$.

דוגמאות:

1. $u_x + u_y = 0$ מד"ח מסדר ראשון, לינארית.
2. $u_{xx} + u_y = 0$ מד"ח מסדר שני, לינארית.
3. $u^2 u_x = x \sin y$ מד"ח מסדר ראשון, לא לינארית. בעתיד נקרא למשוואה הזו קוואזי-לינארית, כי אם נתעלם מהפושע u , היא לינארית (כלומר ביחס ל- $u_{y-1} u_x$).
4. $u_{xy} + u_{yy} = u^2 + e^{xy}$ מד"ח מסדר שני, לא לינארית (אך קוואזי-לינארית).

הגדרה של פתרון של מד"ח מסדר 1

הגדרה: יהי $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום (כלומר, קבוצה פתוחה וקשירה מסליתית).

1. פתרון של המד"ח (1) ב- D הוא פונקציה $u(x, y)$ של שני משתנים שגזירה ברציפות בתחום D : $u \in C^1(D)$ (כלומר, הנגזרות החלקיות u_x, u_y קיימות ורציפות בכל D) ומקיימת את (1) לכל $(x, y) \in D$.
2. בעית שפה מסוג דיריכלה עבור המד"ח (1) והתחום D היא:

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0, & (x, y) \in D \\ u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial D \end{cases}$$

כאשר $f: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. פתרון של בעית דיריכלה הוא פונקציה $u(x, y)$ אשר מקיימת את התנאים הבאים.

- א. הפונקציה $u(x, y)$ רציפה על כל $\overline{D}$ (יחד עם השפה ∂D). כלומר, $u \in C(\overline{D})$.
- ב. הפונקציה u היא פתרון של המד"ח בתוך D , כלומר $u \in C^1(D)$ ומקיימת את המד"ח לכל $(x, y) \in D$.
- ג. הפונקציה u מקיימת את תנאי השפה, כלומר לכל $(x, y) \in \partial D$ מתקיים כי $u(x, y) = f(x, y)$.

הערות:

- הדרישה כי $u(x, y)$ רציפה על $\overline{D}$ מכריחה קשר בין ערכי הפתרון בתוך D לבין ערכי השפה המבוקשים. אחרת אפשר היה למשל לקחת $u(x, y)$ שפותרת את המד"ח בתוך D ולהגדיר אותה מלאכותית על ∂D להיות שווה לפונקציה הנתונה $f(x, y)$.
 - באופן כללי, למד"ח מסדר k בתחום D יכולים להיות כל מיני סוגים של תנאים נלווים. בעית דיריכלה היא דוגמה מיוחדת שבה התנאים הנלווים הם על ∂D בלבד ומתייחסים ל- $u(x, y)$ עצמה. סוג נוסף של תנאי נלווה: תנאי על $u_x(x, y)$. במקרה זה, נדרוש $u \in C^1(\overline{D})$.
 - עוד סוג, בעית נוימן: תנאי על $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$ על ∂D , כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה מאונך ל- ∂D .
- באופן כללי, בכל מצב שהתנאים הנלווים מתייחסים לערכים של $u(x, y)$ ונגזרותיה על עקום בתחום $\overline{D}$, הבעיה מכונה בעית קושי. כלומר, בעית דיריכלה ובעית נוימן הן דוגמאות של בעיות קושי.

דוגמה לפתרון של מד"ח לינארית מסדר 1

נפתור את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0, \\ u(x, 0) = \sin x \end{cases}$$

בדרך כלל נציין את התחום כחלק מתיאור הבעיה אבל לפעמים לא, ובמקרה שלא (כמו כאן) אז נחפש פתרון בכל תחום שיכול להתאים. נעיר שזו בעיית קושי אבל לא בעיית דיריכלה או נוימן.

המד"ח היא לא מסוג של "מד"ר בהסוואה". לכן במבט ראשון לא ברור איך לפתור אותה. נשתמש בשפן הבא שנשלף מכובע החלפות המשתנים (בשלב זה ללא הסבר):

$$\begin{cases} s = x - y, \\ t = y \end{cases}$$

נסמן $v(s, t) = u(x(s, t), y(s, t))$ אז $v(s, t)$ פונקציה גזירה, מתקיים הכלל ההפוך $u(x, y) = v(s(x, y), t(x, y))$ ו-

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_s(s(x, y), t(x, y)), \\ u_y(x, y) = -v_s(s(x, y), t(x, y)) + v_t(s(x, y), t(x, y)) \end{cases}$$

אנחנו נכתוב בדרך כלל בכתוב מקוצר, מבלי לציין את המשתנים. חשוב לשים לב שלא להתבלבל כי המשתנים לא בדיוק זהים בשני האגפים: $u_x = v_s$ ו- $u_y = v_t - v_s$. בכל אופן, נציב למשוואה ונקבל:

$$0 = u_x + u_y = v_s + v_t - v_s = v_t$$

שימו לב ש- $v_t = 0$ **אם ורק אם** u פתרון, כי החלפת המשתנים היא הפיכה ולכן כל מה שעשינו, ניתן לעשות בכיוון השני.

קיבלנו משוואה שניתן כבר לפתור בקלות: $v(s, t) \equiv C(s)$. לכן

$$u(x, y) = v(s(x, y), t(x, y)) = C(x - y)$$

זהו הפתרון הכללי של המד"ח. נוסיף את התנאי הנלווה ונקבל:

$$\sin x = u(x, 0) = C(x)$$

לכן $u(x, y) = \sin(x - y)$ ומצאנו פתרון יחיד בכל המישור.

מבוא מוקדם לפתרונות מוכללים

בחדו"א לומדים שאם f רציפה אז $F(x) = \int_0^x f$ היא פונקציה קדומה של f : F גזירה בכל נקודה ומתקיים $F'(x) \equiv f(x)$.

אם f לא רציפה, אז הטענה כבר לא נכונה ויתכן ש- F אינה גזירה בכל נקודה. אפשר היה לומר, וזה לא נעשה בחדו"א אבל נעשה את זה לצורך הדוגמה, שבמקרה הזה F היא פונקציה "קדומה מוכללת" של f . היא לא באמת פונקציה קדומה, ואולי אפילו לא גזירה, אבל היא מתקבלת מ- f בשיטה מקובלת למציאת פונקציה קדומה לו f הייתה מקיימת תנאים שהיא לא מקיימת.

דוגמה: אם $f(x) = \text{sgn}(x)$ אז מתקבלת הפונקציה הקדומה המוכללת $F(x) = |x|$. היא לא באמת פונקציה קדומה של f , הרי היא אינה גזירה בנקודה $x = 0$. בכל זאת, מעניין לשים לב שהיא גזירה לכל $x \neq 0$ ומקיימת $F'(x) = f(x)$.

למעשה, כל פונקציה קדומה מוכללת תקיים את התנאי: גזירה ו- $F'(x) = f(x)$ ל"רוב" ערכי x . זו דוגמה להכללה של פתרון בעיה, שבה מתקבלת מציאות שאינה רחוקה מהרצוי.

ומה הקשר למד"ח? אנחנו נלמד שיטות רבות לפתרון בעיות קושי. כדי שהשיטות הללו יעבדו, התנאים הנלווים יצטרכו לקיים כל מיני הנחות (כמו גזירות ברציפות למשל). אנחנו נאמר ש- $u(x, y)$ הוא **פתרון מוכלל** של הבעיה אם הוא מתקבל מאותה שיטה, כאשר חלק מההנחות על התנאים הנלווים אולי לא מתקיימות. ברוב המקרים זה יוביל לכך ש- $u(x, y)$ אינו באמת פתרון בכל מקום (אולי אינו גזיר ברציפות, למשל), אבל כן "רוב" הנקודות.

בכל בעיה שבה זה יצוץ, נציין במדויק למה אנחנו מתכוונים בפתרון מוכלל עבור אותה בעיה. להבדיל, פתרון במובן הרגיל (כלומר, לא מוכלל) מכונה לעיתים **פתרון אמיתי** כדי להבדיל אותו מפתרון מוכלל.

1.2 מד"ח לינאריות וקוואזי לינאריות מסדר 1

הגדרה של מד"ח לינארית וקוואזי לינארית מסדר 1

הגדרה: משוואה דיפרנציאלית חלקית לינארית מסדר ראשון בתחום D היא משוואה מהצורה

$$a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = d(x, y) \quad (2)$$

כאשר a, b, c, d מוגדרות ב- D ולפחות אחת מבין a, b אינה זהותית אפס ב- D .

1. אם $d(x, y) \equiv 0$, נאמר שהמשוואה הומוגנית.
2. הפונקציות $a(x, y)$, $b(x, y)$ ו- $c(x, y)$ (ולעיתים גם החלק האי-הומוגני $d(x, y)$) נקראות מקדמי המשוואה.
3. הביטוי $L[u] = a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u$ מכונה האופרטור הדיפרנציאלי המתאים למד"ח.
4. נאמר שהמד"ח רציפה בנקודה (x_0, y_0) אם a, b, c, d רציפות בנקודה זו (וכנ"ל לגבי קבוצה).

דוגמאות:

$$1. \quad xu_x - u_y = u - xy^2 \quad \text{היא משוואה לינארית אי הומוגנית.}$$

$$2. \quad u_x + xu_y = xu - u^2 \quad \text{אינה משוואה לינארית.}$$

הערה: המושגים "הומוגנית" וכן "אי הומוגנית" שמורים אך ורק למד"ח לינארית.

הגדרה: משוואה דיפרנציאלית חלקית קוואזי-לינארית מסדר ראשון:

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u) \quad (3)$$

הפונקציות $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$ ו- $c(x, y, u)$ נקראות מקדמי המשוואה.

הערה: במקרה זה לא מגדירים $L[u]$.

דוגמאות:

1. כל משוואה לינארית היא קוואזי-לינארית.
2. ראינו ש- $u_x + xu_y = xu - u^2$ אינה לינארית, אך היא קוואזי-לינארית.
3. $u^2 u_x + 2u_y = \sin u - x$ היא קוואזי-לינארית.
4. $u_x^2 - u_y = 0$ אינה קוואזי-לינארית.

עיקרון הסופרפוזיציה

משפט 1: נניח ש- $u(x, y)$ ו- $v(x, y)$ פותרים מד"ח לינארית מסדר ראשון עם מקדמים זהים פרט לחלק האי-הומוגני, שהוא $f(x, y)$ עבור u ו- $g(x, y)$ עבור v . כלומר:

$$\begin{cases} a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y), \\ a(x, y) v_x + b(x, y) v_y + c(x, y) v = g(x, y) \end{cases}$$

אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, הפונקציה $\alpha u(x, y) + \beta v(x, y)$ פותרת את אותה מד"ח עם חלק אי-הומוגני $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$.

המשפט הזה מכונה **עיקרון הסופרפוזיציה**. הוא תקף למד"ח לינארית מכל סדר, לא רק סדר ראשון, עם הוכחה דומה. הוא לא תקף למד"ח קוואזי-לינארית שאינה לינארית.

מסקנה 2: נניח כי $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ מוגדרות בתחום D , ועבור $u \in C^1(D)$ נסמן

$$L[u] = a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u$$

תהי $d(x, y)$ מוגדרת ב- D .

1. אם $u(x, y), v(x, y)$ פתרונות של המד"ח האי הומוגנית עם אותו חלק אי הומוגני $d(x, y)$, אז $u - v$ היא פתרון של המד"ח ההומוגנית.

כלומר:

$$L[u] = d, L[v] = d \Rightarrow L[u - v] = 0$$

2. אם $u(x, y), v(x, y)$ פתרונות של המד"ח ההומוגנית, אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\alpha u + \beta v$ גם פתרון של המד"ח ההומוגנית.

כלומר:

$$L[u] = 0, L[v] = 0 \Rightarrow L[\alpha u + \beta v] = 0$$

במילים אחרות, קבוצת הפתרונות של המד"ח ההומוגנית היא תת מרחב וקטורי של $C^1(D)$.

3. אם $u_p(x, y)$ פתרון של המד"ח האי הומוגנית עם חלק אי הומוגני $d(x, y)$, אז u הוא פתרון של מד"ח זו אם ורק אם קיים פתרון u_H של המד"ח ההומוגנית כך שמתקיים $u = u_H + u_p$.

נהוג לומר את סעיף 3 גם קצת אחרת: אם u_p פתרון פרטי של מד"ח אי הומוגנית ו- u_H הוא פתרון כללי של המד"ח ההומוגנית המתאימה, אז הפתרון הכללי של המד"ח האי הומוגנית נתון על ידי

$$u_{NH}(x, y) = u_H(x, y) + u_p(x, y)$$

נזכיר שאותו כלל נכון גם למד"ר לינאריות, וגם למערכות משוואות לינאריות באלגברה לינארית.

הערה: העיקרון מאחורי עיקרון הסופרפוזיציה הוא בעצם ש- $L[u]$ הוא אופרטור לינארי.

1.3 קווים אופייניים

מבוא לשיטת האופייניים

מטרתנו ככל שניתן היא למצוא פתרונות. פתרון כללי למד"ח זה מצוי, ולפעמים נשמח גם לפתרון לבעיית קושי כללית כלשהי.

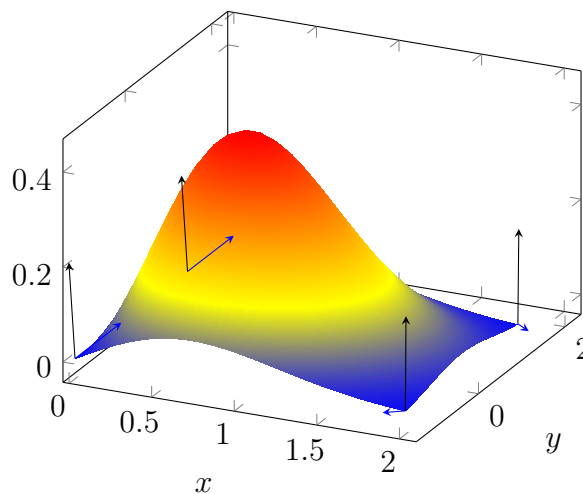
יש שיטה למציאת פתרון כללי של מד"ח לינארית מסדר ראשון: מוצאים החלפת משתנים חכמה אשר תחתה המשוואה הופכת ל"מד"ר בהסוואה". אנחנו לא נכסה את אופן מציאת החלפת המשתנים הזו, אם כי ראינו דוגמה של יישום השיטה בפרק המבוא.

יש מספר שיטות למציאת פתרון לבעיית קושי עבור מד"ח קוואזי-לינארית. אנחנו נתמקד בשיטה שמכונה **שיטת האופייניים**. היא שיטה גיאומטרית מטבעה ותהיה הנושא של הסעיף הבא. בינתיים רק נציין שפתרון $u(x, y)$ של מד"ח כלשהי מתאים למשטח במרחב - הגרף $z = u(x, y)$. המשטח הזה מכונה **משטח פותר**.

נניח שנתון פתרון $u(x, y)$ של המד"ח הקוואזי-לינארית (3). כלומר, בכתוב מקוצר: $au_x + bu_y = c$. אפשר לתת למשוואה הזו פירוש גיאומטרי: $(a, b, c) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0$, או בכתוב מלא -

$$(a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u)) \cdot (u_x(x, y), u_y(x, y), -1) \equiv 0$$

נזכיר שהוקטור הימני בשוויון הנ"ל הוא הוקטור הנורמל למשטח $z = u(x, y)$ בנקודה $(x, y, u(x, y))$. כלומר, הוקטור השמאלי בשוויון הנ"ל הוא משיק למשטח הפותר בנקודה זו.



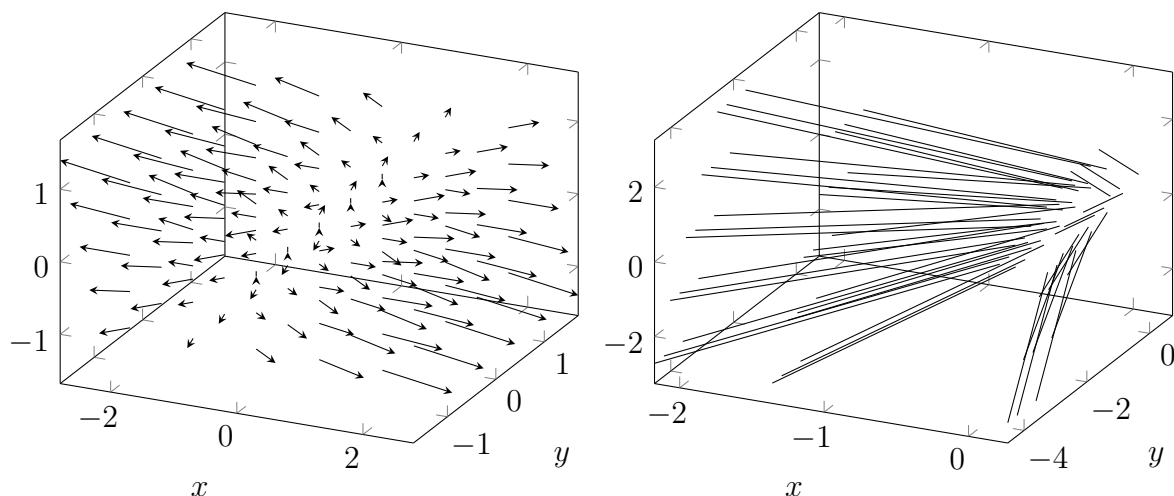
זה נכון בכל נקודה בתחום שבו $u(x, y)$ פתרון.

כלומר, השדה הוקטורי $\vec{F} = (a, b, c)$ משיק למשטח הפותר בכל נקודה על המשטח. זה מוביל לרעיון הבא: נרכיב משטחים פותרים מקווים שמקיימים $\dot{\vec{\gamma}}(t) \parallel \vec{F}(\vec{\gamma}(t))$.

הגדרה של קווים אופייניים

התנאי $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \alpha(t) \vec{F}(\vec{\gamma}(t))$ הוא תנאי לא נוח, אבל אם $\alpha(t) \neq 0$ (ולרוב גם אם מתאפס) אפשר לשנות פרמטריזציה ולהפוך את קבוע הפרופורציה ל-1. לכן מתקבל על הדעת להגדיר במדויק באופן הבא:

הגדרה: עקום גזיר ברציפות L נקרא **קו אופייני** של המד"ח הקוואזי לינארית (3) אם קיימת פרמטריזציה גזירה ברציפות



איור 1: השדה הוקטורי (a, b, c) עבור המד"ח $xu_x - uu_y = u$, והקווים האופייניים המתקבלים ממנו.

$(x(t), y(t), u(t))$ של L כך ש-

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x(t), y(t), u(t)), \\ \dot{y}(t) = b(x(t), y(t), u(t)), \\ \dot{u}(t) = c(x(t), y(t), u(t)) \end{cases} \quad (4)$$

דוגמה: נמצא את כל הקווים האופייניים של המד"ח $uu_x + u_y = 1$. כאן $a(x, y, u) = u$, $b \equiv c \equiv 1$. לכן משוואות הקווים האופייניים (4) הן:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = 1, \\ \dot{u} = 1 \end{cases}$$

נקבל את הקווים: $(\frac{1}{2}t^2 + C_3t + C_1, t + C_2, t + C_3)$ (כאן $t \in \mathbb{R}$).

הערה: זהו מקרה פרטי של המושג הכללי יותר **קו אינטגרלי**. באופן כללי, בהנתן שדה וקטורי, קו אינטגרלי של השדה הוא קו שבכל נקודה, השדה משיק לו. נתקלם בזה אולי בתור "קווי השדה המגנטי" בקורס בפיסיקה. ראו דוגמה ציורית באיור 1.

קווים אופייניים מכסים את המרחב

בדוגמה נדמה שיש שלוש דרגות חופש בבחירת קו אופייני של מד"ח נתונה. הפירוש הוא פשוט: בחירה של נקודה שדרכה הקו יעבור. ובאמת, בדוגמה הנ"ל הקבועים C_1, C_2, C_3 הם בדיוק המיקום של הקו כאשר $t = 0$. באופן כללי:

משפט 3: נניח שמקדמי המד"ח (3) גזירים ברציפות בתחום $D \subset \mathbb{R}^3$. אז לכל נקודה $(x_0, y_0, u_0) \in D$ קיים בדיוק קו אופייני אחד של המד"ח שעובר בנקודה.

הערה: לא נבחין בין קו לבין אותו קו עם פרמטר מוזן: $\vec{\gamma}(t) \leftrightarrow \vec{\gamma}(t - t_0)$. לכן תמיד נניח בלי הגבלת הכלליות שהקו עובר בנקודה המעניינת, אם יש כזו, עבור $t = 0$ (אם היה t_0 אחר, היינו מזיזים).

כלומר, הקווים האופייניים מכסים את כל התחום אבל הם לא נחתכים: אם שני קווים אופייניים שונים היו נחתכים, אז נקודת החיתוך הייתה נקודה שדרכה עוברים שני קווים אופייניים שונים. זה מנוגד למשפט.

נדיוק שאם לוקחים שתי נקודות על אותו קו אופייני, נקבל את אותו קו. לכן בעצם אין 3 דרגות חופש אלא 2.

1.4 משטחים פותרים מורכבים מקווים אופייניים

הקשר בין קווים אופייניים לבין משטחים פותרים

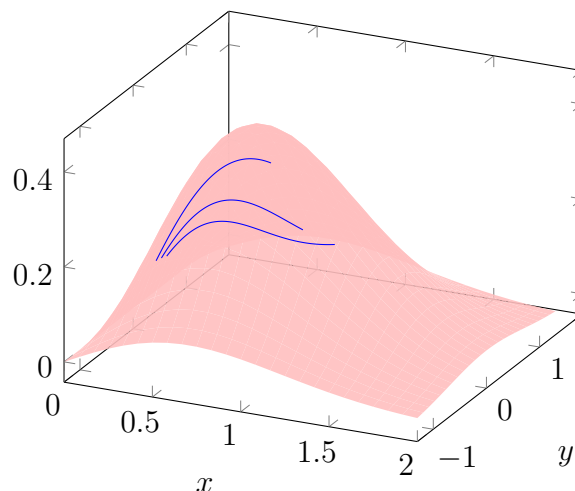
השלב הבא בדין הוא להבין את הקשר בין קווים אופייניים למשטח פותר. ספוילר: המוטיבציה מאחורי ההגדרה של קו אופייני הייתה שמשטח פותר מורכב מקווים אופייניים. המשפט הבא, על שני חלקי, הופך את המוטיבציה למעשית. הוא יהיה הבסיס לשיטת האופייניים לפתרון בעית קושי עבור מד"ח קוואזי-לינארית.

משפט 4: נניח כי מקדמי המד"ח הקוואזי לינארית (3) גזירים ברציפות בתחום D .

1. (טענה מקומית) יהי $u(x, y)$ פתרון של המד"ח הקוואזי-לינארית (3) בסביבת הנקודה (x_0, y_0) , ויהי L קו אופייני של המד"ח שעובר בנקודה $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ עבור $t = 0$ בפרמטריזציה כלשהי. אז L מוכל כולו במשטח הפותר $z = u(x, y)$ עבור t בסביבה של $t = 0$.

2. (טענה גלובלית) תהי $u \in C^1(D)$ גזירה ברציפות בתחום D . נניח כי המשטח $z = u(x, y)$ הוא איחוד של קווים אופייניים של (3). אז $u(x, y)$ היא פתרון של המד"ח הקוואזי-לינארית (3) ב- D .

החלק הראשון אומר שקו אופייני שנוגע במשטח פותר, לא יכול לעזוב אותו. הערך $t = 0$ הוא שרירותי, ואפשר להחליף אותו ב- $t = t_0$. החלק השני אומר שמשטח שמורכב מקווים אופייניים הוא משטח פותר.



המשפט נותן לנו דרך רעיונית למצוא פתרון של מד"ח קוואזי-לינארית מסדר ראשון נתונה. נמצא את הקווים האופייניים של המד"ח, ונרכיב מחלק מהם משטח C^1 , שהוא גרף של פונקציה.

בפעם הבאה נראה איך עושים את זה, פרקטית.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. משפט הפונקציות הסתומות מחדו"א 2, לחילוף 2 משתנים מתוך מערכת של 2 משוואות.

“ *The last thing the twenty-first century wants to admit is that it might not know everything.*

”

Jim Butcher, Summer Knight