

שבוע 12: התמרת לפלס (המשך)

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	התמרת לפלס (המשך)
2	1.1	פתרון מד"ר בעזרת התמרת לפלס
6	1.2	דלתא של דיראק
10	1.3	קונבולוציה והתמרת לפלס שלה

THE CINNAMON ROLL DELTA FUNCTION



תזכורות

מד"ר לינארית אי-הומוגנית עם מקדמים קבועים:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b(x) \quad (1)$$

פונקצית הביסייד:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases} \quad (2)$$

1 | התמרת לפלס (המשך)

1.1 פתרון מד"ר בעזרת התמרת לפלס

השיטה

תכונת ההתמרה של נגזרת במשפט ?? (והגרסה הכללית יותר שלה לנגזרת מסדר גבוה) מותאמת במיוחד לפתרון בעיות התחלה עבור מד"ר לינאריות עם מקדמים קבועים.

דוגמאות:

1. נמצא פתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

אם הפתרון $y(x)$ מקיים את התנאים הדרושים לתכונת ההתמרה של נגזרת, אז מהפעלת התמרת לפלס על המד"ר נקבל כי

$$0 = \mathcal{L}[y'' - y' - 2y](s) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - (sY(s) - y(0)) - 2Y(s)$$

ניעזר בתנאי ההתחלה ונקבל כי

$$(s^2 - s - 2)Y(s) - s + 1 = 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2}$$

נמצא פונקציה (רציפה) שהתמרתה היא $Y(s)$ ונבדוק שאכן מדובר בפתרון של בעיית התחלה.

לצורך כך נבצע פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{3} \mathcal{L}[e^{2t}](s) + \frac{2}{3} \mathcal{L}[e^{-t}](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}\right](s)$$

בדיקה פשוטה מראה שהפונקציה

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

היא אכן פתרון של בעית ההתחלה.

2. נמצא פתרון של הבעיה

$$\begin{cases} y'' + y = \sin(2t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

נפעיל התמרת לפלס על המד"ר ונקבל

$$\mathcal{L}[y'' + y](s) = \mathcal{L}[\sin(2t)](s)$$

לכן לפי תכונות והתמרות מוכרות,

$$s^2 Y(s) - s \cdot 2 - 1 + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4} \Rightarrow Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)}$$

נבצע פירוק לשברים חלקיים ונקבל

$$\begin{aligned} \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} &= \frac{2s + \frac{5}{3}}{s^2 + 1} + \frac{-\frac{2}{3}}{s^2 + 4} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \\ &= 2\mathcal{L}[\cos t](s) + \frac{5}{3}\mathcal{L}[\sin t](s) - \mathcal{L}\left[\frac{1}{3}\sin(2t)\right](s) = \mathcal{L}\left[2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin(2t)\right](s) \end{aligned}$$

ואכן, קל לבדוק כי

$$y(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin(2t)$$

פתרון של בעית ההתחלה.

הבחנות לגבי שיטת הפתרון

- באופן כללי, בהנחה שהפתרון $y(x)$ מקיים את הדרישות להתמרה של נגזרת מסדר גבוה,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[L[y]](s) &= \mathcal{L}[a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y](s) \\ &= a_n (s^n Y(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)) + \dots + a_0 Y(s) \\ &= (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) Y(s) + P(s) \end{aligned}$$

כאשר $P(s)$ הוא פולינום אשר תלוי בתנאי ההתחלה.

מעניין לשים לב שהגורם אשר כופל את $F(s)$ הוא בדיוק הפולינום האופייני $p(s)$ של המד"ר.

- אם המד"ר הומוגנית ועם מקדמים קבועים, אזו יודעים בדיוק מהם כל הפתרונות שלה, וכולם מקיימים את הדרישות לנוסחת ההתמרה של נגזרת מכל סדר.
לכן, במקרה זה, מתחייב שהשיטה תעבוד, ובנוסף לפי יחידות עבור התמרת לפלס עליה נדבר מיד, היא תמיד תפיק אך ורק את הפתרון היחיד של הבעיה.
- בדוגמאות שעשינו, יכולנו להתמודד בקלות גם ללא התמרת לפלס. באחת הדוגמאות היה מדובר במד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים, ובשניה ניתן להשתמש בשיטה של השוואת מקדמים.
התמרת לפלס תהיה שימושית במיוחד כפי שנראה במקרה של חלק אי הומוגני שאינו רציף. בכל זאת, אפשר לדמיין שגם במקרה של חלק אי הומוגני שאינו מאפשר השוואת מקדמים, שימוש בהתמרת לפלס עלול להיות קצר יותר מאשר שימוש בוריאצית פרמטרים.

יחידות עבור התמרת לפלס

שיטת הפתרון של מד"ר בעזרת התמרת לפלס היא כזו שאנו מוצאים את ההתמרה $Y(s)$ של פתרון לא ידוע $y(t)$, ואז מזהים פונקציה אשר התמרתה $Y(s)$ ומנחשים שפונקציה זו היא הפתרון $y(t)$.
מעניין לציין שעבור פונקציות רציפות, שוויון בין התמרות גורר בהכרח שוויון בין הפונקציות.
כלומר, אם זיהינו $Y(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, אז מתחייב כי $y(t) \equiv f(t)$. ננסח במדויק:

משפט 1: נניח כי f, g רציפות בקטע $[0, \infty)$.

אם קיים $s_0 \in \mathbb{R}$ כך שהתמרות לפלס $F(s), G(s)$ של f, g בהתאמה מוגדרות לכל $s > s_0$ ובנוסף מתקיים כי

$$F(s) \equiv G(s), \quad s > s_0$$

אז $f(t) \equiv g(t)$ בקטע $[0, \infty)$.

למעשה, קיימת אפילו נוסחה לחישוב $f(t)$ מתוך $F(s)$ (בניגוד למציאת פונקציה אשר התמרתה $F(s)$ ואז זיהוי שלה בתור $f(t)$), אבל לא נעסוק בכך.
לא נוכיח את המשפט.

פתרונות מוכללים של מד"ר

כפי שנראה מיד, התמרת לפלס שימושית במיוחד כדי להתמודד עם מד"ר לינארית בעלת מקדמים קבועים ועם חלק אי הומוגני לא רציף. אחד המקרים העיקריים הוא כאשר לחלק האי הומוגני יש קפיצה (או מספר קפיצות).

זהו לא מצב סטנדרטי: אם $y(x)$ היא פונקציה אשר מקיימת את המד"ר (1) בקטע I , אז משתמע כי $y(x)$ גזירה n פעמים בכל I . ברוב הדוגמאות ראינו כי למעשה $y \in C^n(I)$, כלומר $y^{(n)}$ רציפה בקטע I , אך גם ללא הנחה זו מתחייב כי $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ רציפות וכן ל- $y^{(n)}$ אין נקודות קפיצה ב- I בתור פונקצית נגזרת.

אלא שמכך נובע כי לאגף שמאל של המד"ר (1) אין נקודות קפיצה, כלומר, לא יתכן שהמד"ר מתקיימת אם לאגף ימין $b(x)$ יש נקודות קפיצה. מצד שני, למד"ר (1) עם חלק אי הומוגני כמו למשל $b(t) = u_1(t)$ יש משמעות פיסיקלית פשוטה שראוי לכן להתעניין בה: בזמן $t = 1$ מתחיל לפעול כוח שלא פעל קודם (למשל, על ידי הדלקת מתג).

באופן דומה, לחלק האי הומוגני $b(t) = 1 - u_c(t)$ יש משמעות של כיבוי מתג בזמן $t = c$.

בסך הכל, נרצה לתת משמעות פשוטה לפתרון של מד"ר (1) במקרה שהחלק האי הומוגני אינו רציף במספר נקודות.

הגדרה: פתרון מוכלל של מד"ר מסדר n בקטע I הוא פונקציה $y(t)$ אשר רציפה ב- I , ובנוסף מקיימת כי בכל תת קטע חסום של I , $y(t)$ גזירה n פעמים ומקיימת את המד"ר בכל נקודה פרט למספר סופי של נקודות בתת הקטע.

דוגמה: הפונקציה $y(t) = |t|$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ ומקיימת כי

$$y'(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

לכן היא מהווה פתרון מוכלל של המד"ר $y' = \text{sgn}(t)$ בכל $\mathbb{R}$.

הערות:

- ההגדרה עובדת גם בקטעים שבהם המד"ר אינה מוגדרת בכל נקודה.
- התנאי בהגדרה מנוסח לכל תת קטע חסום במקום עבור I עצמו כדי לאפשר אינסוף נקודות אי גזירות אם למשל $I = \mathbb{R}$. העיקר עבורנו הוא שנקודות אלו אינן **מצטברות**.
- המושג של פתרון מוכלל הוא מקרה פרטי של מושג כללי יותר אבל שמצריך קצת יותר התעסקות, של פתרון **חלש** של משוואה דיפרנציאלית. לצרכינו תספיק בגדול היכרות עם פתרונות מוכללים (אם כי ניאליץ בכל זאת להיזהר כאשר נדבר בקרוב על תגובה להלם).

דוגמה של מד"ר עם פתרונות מוכללים

נמצא פתרון עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + y = b(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

כאשר

$$b(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

אפשר לפרש את $y(t)$ כתנועה של מסה אשר מחוברת לקפיץ ומשוחררת ממצב של קפיץ מתוח, כאשר במשך פרק הזמן $1 \leq t < 2$ פועל גם כוח קבוע חיצוני.

ראשית נשים לב כי $b(t) = u_1(t) - u_2(t)$ ולכן

$$\mathcal{L}[b](s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}, \quad s > 0$$

נפעיל התמרה על המד"ר ונקבל כי

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}$$

לכן מתנאי ההתחלה,

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(s^2 + 1)} + \frac{s}{s^2 + 1}$$

ראשית,

$$\frac{s}{s^2 + 1} = \mathcal{L}[\cos t](s)$$

שנית, בעזרת פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$$

נקבל כי

$$\frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(s^2 + 1)} = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-s}s}{s^2 + 1} + \frac{e^{-2s}s}{s^2 + 1}$$

לכן לפי התמורות מוכרות והתמרה של הזזה,

$$\frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(s^2 + 1)} = \mathcal{L}[u_1(t)](s) - \mathcal{L}[u_2(t)](s) - \mathcal{L}[u_1(t) \cos(t-1)](s) + \mathcal{L}[u_2(t) \cos(t-2)](s)$$

לכן בסך הכל,

$$y(t) = u_1(t)(1 - \cos(t-1)) - u_2(t)(1 - \cos(t-2)) + \cos t$$

אפשר לכתוב זאת גם כך:

$$y(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \leq t < 1 \\ \cos t + 1 - \cos(t-1) & 1 \leq t < 2 \\ \cos t - \cos(t-1) + \cos(t-2) & t \geq 2 \end{cases}$$

1.2 דלתא של דיראק

הלם ודלתא של דיראק

הלם במערכת דינמית הוא תופעה חשובה ונפוצה, ונקדיש כעת מעט זמן כדי להבין איך להתמודד איתה. בהשוואה לכוח קבוע וסופי שפועל למשל בפרק הזמן $1 \leq t < 2$, הלם הוא כוח אדיר שפועל לרגע אחד. ניתן היה להתמודד עם כוח קבוע וסופי בעזרת פונקציות הביסייד, למשל $u_1(t) - u_2(t)$. איך מייצגים הלם?

יש כאן אתגר יוצא דופן. אנחנו מחפשים פונקציה $\delta(t)$ אשר שווה לאפס לכל $t \neq 1$ (למשל, עבור הלם ברגע $t = 1$) ועדיין מייצגת כוח אדיר (אינסופי) עבור $t = 1$. כלומר, אנחנו מחפשים משהו כמו

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 1 \\ 0 & t \neq 1 \end{cases} \quad (3)$$

אפשר אולי לחשוב שהערך ∞ ברגע $t = 1$, אם נפרש נכון את המשמעות של פונקציה אשר שווה לאינסוף, פותר את הבעיה. אלא שהמצב מורכב יותר. כל פירוש סביר של התיאור (3) של $\delta(t)$ בתור פונקציה יסתכם בכך שמדובר בפונקציה אשר שקולה לפונקציה האפס.

מתברר שאפשר לקבל הבנה טובה יותר של הלם אם חושבים על מתקף. אנחנו מחפשים $\delta(t)$ שמייצג הלם באופן שהמתקף הכולל של הכוח הוא, נניח, יחידה אחת:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

מכך ניתן כבר לראות תקלה אחת של הפירוש (3) של הלם. מצד אחד, סביר כי $2\delta(t)$ ייצג הלם כפול בעוצמתו, כלומר

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t) dt = 2$$

מצד שני, לעד יתקיים כי $\infty = \infty \cdot 2$ ולכן אם היינו מאמצים את הפירוש (3) אז $\delta(t) = 2\delta(t)$. זה לא הגיוני.

לא ניתן את הפירוש המלא והנכון של הלם, אשר מכונה **דלתא של דיראק**¹. במקום זאת, נכתוב מספר עובדות לגביה.

1. יחידה אחת של הלם ברגע $t = t_0$ מיוצגת על ידי דלתא של דיראק $\delta_{t_0}(t)$, אשר אינה פונקציה במובן של חדו"א.

2. למרות שדלתא של דיראק אינה פונקציה, ניתן לתת משמעות לשוויון הבא אשר מכונה **התכונה היסודית של דלתא של דיראק**: לכל פונקציה f חסומה ורציפה למקוטעין אשר רציפה בנקודה $t = t_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_{t_0}(t) dt = f(t_0) \quad (4)$$

3. עבור $t_0 > 0$, התמרת לפלס של דלתא של דיראק ניתנת לפירוש בעזרת התכונה היסודית (4):

$$\mathcal{L}[\delta_{t_0}(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta_{t_0}(t) dt = e^{-st_0}, \quad s \in \mathbb{R}$$

קירוב של דלתא של דיראק

ניתן לפעמים לפענח תכונות צפויות של דלתא של דיראק בעזרת **קירוב של דלתא**. נדגים עבור $t_0 = 0$, כלומר עבור $\delta_0(t)$.

ניקח פונקציה $H(t)$ אינטגרלית בהחלט בכל $\mathbb{R}$ אשר מקיימת כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t) dt = 1$$

ולכל $\alpha > 0$ נגדיר

$$H_\alpha = \frac{1}{\alpha} H\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

אפשר להוכיח שמתקיימים התנאים הבאים:

¹אנו מפצירים בכם לא לקרוא לה **פונקציה דלתא**.

1. לכל $\alpha > 0$ מתקיים כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{\alpha}(t) dt = 1$$

2. לכל פונקציה $f(t)$ רציפה למקוטעין אשר חסומה בכל $\mathbb{R}$ ורציפה בנקודה $t = 0$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) H_{\alpha}(t) dt = f(0)$$

זה יכול להיות שימושי היות שלא הגדרנו את $\delta_{t_0}(t)$ במדויק אלא רק ציינו מספר עובדות לגביה. לכן יש שאלות שלא ברור כיצד לענות עליהן.

למשל, מה זה $(\delta_0(t))^2$? תשובה: חסר משמעות. אבל בלי הגדרה מדויקת של $\delta_0(t)$, אין לנו יכולת מלאה להצדיק זאת.

דוגמאות:

1. ניקח

$$H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נקבל

$$H_{\alpha}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & -\alpha \leq t \leq \alpha \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

2. ניקח

$$H(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

נקבל

$$H_{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}}$$

הערות לגבי דלתא של דיראק

1. לעיתים כותבים $\delta(t - t_0)$ במקום $\delta_{t_0}(t)$.

2. דלתא של דיראק שימושית מאוד בהקשרים נוספים מלבד הלם. למשל, צפיפות מסה אורכית עבור מסה נקודתית בנקודה x_0 ניתנת לפירוש בתור $\delta_{x_0}(x)$. כנ"ל עבור צפיפות מטען אורכית של מטען נקודתי.

3. דלתא של דיראק ניתנת להכללה לשניים, שלושה ויותר מימדים, והתכונה היסודית (4) ממשיכה לעמוד במרכז הדיון. כך ניתן לתאר למשל צפיפות מסה נפחית של מסה נקודתית, ועוד.

דלתא של דיראק במד"ר

כדי להתעסק באופן מדויק ומלא במד"ר עם דלתא של דיראק, יש להתעמק הרבה יותר בתורה הכללית שמאחורי הלם.

בכל זאת, יש לנו כלי אחד שיאפשר למצוא פתרונות מוכללים למד"ר כאלה: התמרת לפלס. בכל פעם שנתונה מד"ר עם דלתא, נפעיל עליה התמרת לפלס ולאחר מכן נוכל לשכוח מהדלתא.

דוגמה: נמצא פתרון מוכלל עבור בעית ההתחלה

$$\begin{cases} 2y'' + y' = -1 + 3\delta(t-1) \\ y(0) = 10 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הבעיה מתארת טיל שצונח ממנוחה ונמצא תחת השפעה של התנגדות האוויר, ואשר ברגע $t=1$ מפעיל כוח גדול כלפי מעלה.

נפעיל התמרת לפלס ונקבל

$$2(s^2 Y(s) - s \cdot 10) + sY(s) - 10 = -\frac{1}{s} + 3e^{-s}$$

לכן

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2(2s+1)} + 3 \cdot \frac{e^{-s}}{s(2s+1)} + \frac{10}{s(2s+1)} + \frac{20}{2s+1}$$

נפרק לשברים חלקיים כדי להמשיך:

$$\frac{1}{s^2(2s+1)} = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{4}{2s+1}, \quad \frac{1}{s(2s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+1}$$

לכן

$$\frac{1}{s^2(2s+1)} = \mathcal{L} \left[-2 + t + 2e^{-\frac{t}{2}} \right] (s)$$

בנוסף,

$$\frac{e^{-s}}{s(2s+1)} = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s+1} = \mathcal{L} \left[u_1(t) - u_1(t)e^{-\frac{1}{2}(t-1)} \right] (s)$$

לבסוף,

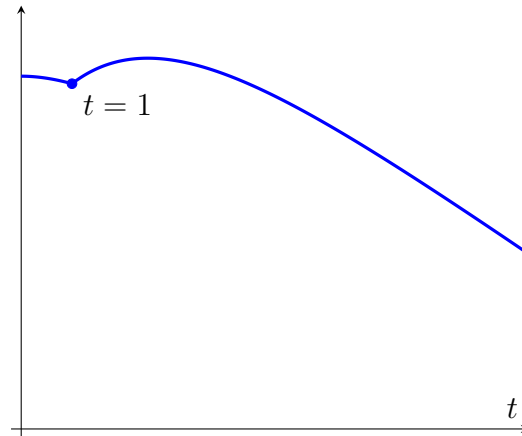
$$\frac{1}{s(2s+1)} = \mathcal{L} \left[1 - e^{-\frac{t}{2}} \right] (s), \quad \frac{1}{2s+1} = \mathcal{L} \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \right] (s)$$

לכן

$$y(t) = 2 - t - 2e^{-\frac{t}{2}} + 3u_1(t) \left(1 - e^{-\frac{1}{2}(t-1)} \right) + 10 - 10e^{-\frac{t}{2}} + 10e^{-\frac{t}{2}}$$

נוכל לכתוב את הפתרון גם באופן הבא:

$$y(t) = \begin{cases} 12 - 2e^{-\frac{t}{2}} - t & 0 \leq t < 1 \\ 15 - 2e^{-\frac{t}{2}} - t - 3e^{-\frac{1}{2}(t-1)} & t \geq 1 \end{cases}$$



1.3 קונבולוציה והתמרת לפלס שלה

הגדרת הקונבולוציה

פעולת הקונבולוציה מופיעה רבות בפיסיקה, בהנדסה ובמתמטיקה.

הגדרה 2. נניח כי f, g פונקציות רציפות למקוטעין בקטע $[0, \infty)$. הקונבולוציה של f, g אם היא מוגדרת, היא הפונקציה אשר מוגדרת על ידי

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$$

נסו להוכיח את התכונות הבאות של הקונבולוציה. הראשונה אולי מעט מאתגרת מדי, והמשמעות של "לכמעט כל x " היא "פרט לקבוצה שמידתה 0".

משפט 3: תהיינה f, g רציפות למקוטעין כך ש-

$$\int_0^\infty |f(t)| dt < \infty, \quad \int_0^\infty |g(t)| dt < \infty$$

1. הקונבולוציה מוגדרת היטב: האינטגרל שמגדיר אותה מתכנס לכמעט כל $t \geq 0$ (כלומר, פרט לקבוצה שמידתה 0). בנוסף,

$$\int_0^\infty |(f * g)(t)| dt < \infty$$

2. קומוטטיביות: $f * g = g * f$.

3. אסוציאטיביות: אם גם

$$\int_0^\infty |h(t)| dt < \infty$$

אז $(f * g) * h = f * (g * h)$.

התמרת לפלס של קונבולוציה

המשפט הבא הוא המוטיבציה העיקרית שלנו לדבר על קונבולוציה.

משפט 4. נניח כי f, g רציפות למקוטעין בקטע $[0, \infty)$ כך שקיימים $K_1, K_2 > 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ עבורם

$$|f(t)| \leq K_1 e^{a_1 t}, |g(t)| \leq K_2 e^{a_2 t}, \forall t \geq 0$$

נסמן $a = \max\{a_1, a_2\}$. אז לכל $t \geq 0$ מתקיים כי

$$|(f * g)(t)| \leq K_1 K_2 t e^{at}$$

בנוסף, לכל $s > a$, התמרת לפלס של הקונבולוציה מוגדרת בנקודה s וכן

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$$

כלומר, התמרה של קונבולוציה היא מכפלת ההתמרות. זו תכונה שיכולה להיות מאוד שימושית.

דוגמה: נניח שפתרנו מד"ר והגענו אל

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

מהי $y(t)$?

נעיר שניתן במקרה הזה לפתור בעזרת פירוק לשברים חלקיים כפי שכבר עשינו בעבר. אבל, דרך אחרת היא לזהות כי

$$Y(s) = \mathcal{L}[\sin t](s) \cdot \mathcal{L}[\cos t](s)$$

ולכן

$$y(t) = (f * g)(t) = \int_0^t \sin x \cos(t - x) dx$$

ניעזר בזהות הטריגונומטרית

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

ונקבל

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (\sin t + \sin(2x + t)) dx = \frac{1}{2} t \sin t - \frac{1}{4} \cos(2x - t) \Big|_{x=0}^{x=t} = \frac{1}{2} t \sin t$$

יתכן כמובן שנקבל את $Y(s)$ כמכפלה של שתי התמרות מוכרות שאינן מהסוג של שברים שניתן לפרק. במקרים כאלו, התכונה של התמרה של קונבולוציה עלולה להיות הכרחית כדי למצוא את $y(t)$.

סיכום של התמרת לפלס

מספר	פונקציה	התמרה	תנאים
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
4	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
5	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
6	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
7	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
8	$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$s > 0$
9	$u_a(t) f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$	
10	$f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$	$c > 0$
11	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	
12	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	
13	$tf(t)$	$-F'(s)$	
14	$\int_0^t f(t-u) g(u) du$	$F(s) G(s)$	

העשרה

1. סרטון אינטואיציה לגבי קונבולוציה.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. משפט הקיום והיחידות עבור מד"ר לינארית מסדר 2.

“ The mathematician plays a game in which he himself invents the rules while the physicist plays a game in which the rules are provided by nature, but as time goes on it becomes increasingly evident that the rules which the mathematician finds interesting are the same as those which nature has chosen.

”

Paul A.M. Dirac