

שבוע 11: התמרת לפלס

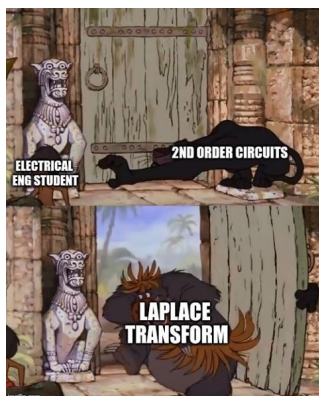
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	התמרת לפלס
2	1.1	פונקציות רציפות למקוטעין
4	1.2	הגדרה של התמרת לפלס ותכונות בסיסיות
7	1.3	התמרת לפלס ונגזרות



1 | התמרת לפלס

1.1 פונקציות רציפות למקוטעין

פונקציות רציפות למקוטעין

התמרות הן כלי מתמטי חזק ויעיל לטיפול בכל מיני סוגי בעיות. התמרת לפלס שימושית לפתרון מד"ר, במיוחד מד"ר לינאריות אי הומוגניות אשר החלק האי הומוגני שלהן אינו רציף.

כדי להגדיר את התמרת לפלס, נסכים ראשית על **מחלקה** של פונקציות שבהן נעסוק.

הגדרה: פונקציה f נקראת **רציפה למקוטעין** בקטע $[a, b]$ אם היא מוגדרת בכל הקטע פרט אולי למספר סופי של נקודות, ורציפה בכל נקודה פרט אולי למספר סופי של נקודות שבהן הגבולות החד-צדדיים בכל זאת קיימים.

שתי פונקציות רציפות למקוטעין נקראות **שקולות** אם הן נבדלות במספר סופי של נקודות.

מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין מסומן $E[a, b]$ (לא מבדילים בין פונקציות שקולות).

עבור קטע $I \subset \mathbb{R}$, פונקציה f נקראת רציפה למקוטעין אם לכל שתי נקודות $a < b$ בקטע I מתקיים כי $f \in E[a, b]$.

אנחנו נאפשר פונקציות שהן לתוך $\mathbb{C}$, כלומר $f(t) = u(t) + iv(t)$. המשמעות של "רציפה / גזירה", המשמעות של הנגזרת או של האינטגרל של f , הכל דרך u, v שהן פונקציות ממשיות של משתנה יחיד.

דוגמאות:

1. כל פונקציה רציפה היא רציפה למקוטעין. למשל, $f(t) = e^{3t}$.

2. הפונקציה

$$f(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \\ -3 & t = 0 \end{cases}$$

אינה רציפה למקוטעין בקטע $[0, \infty)$ היות שהגבול $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ אינו קיים.

3. הפונקציה

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases} \quad (1)$$

רציפה למקוטעין. היא מכונה **פונקציית הביסייד** (Oliver Heaviside, 1850 – 1925).

התמרת לפלס לא תהיה מוגדרת לכל פונקציה רציפה למקוטעין, כפי שמיד נראה.

אבל אנחנו נתמקד רק בהן, ולא ננסה אפילו להגדיר התמרת לפלס עבור פונקציה שאינה רציפה למקוטעין.

הגדרה של האינטגרל של פונקציה מרוכבת על קטע

נתחיל מסוג פשוט של אינטגרציה שיהיה נחוץ לנו: אינטגרל של פונקציה של משתנה ממשי לתוך $\mathbb{C}$.

הגדרה: תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע I , ונסמן $f(t) = u(t) + iv(t)$. נגדיר

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

בתנאי ששני האינטגרלים מתכנסים.

בעצם ההגדרה היא:

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_a^b f \right\} = \int_a^b \operatorname{Re} \{f\}, \quad \operatorname{Im} \left\{ \int_a^b f \right\} = \int_a^b \operatorname{Im} \{f\}$$

דוגמה: אם למשל $f(t) = e^{it}$,

$$\int_0^\pi e^{it} dt = \int_0^\pi \cos t dt + i \int_0^\pi \sin t dt = 2i$$

תכונות של האינטגרל של פונקציה מרוכבת על קטע

התכונות הבסיסיות הבאות מתקבלות מיד מתכונות מוכרות של אינטגרל רימן:

משפט 1: תהי f רציפה למקוטעין בקטע חסום $[a, b]$.

1. האינטגרל $\int_a^b f(t) dt$ מתכנס.

2. לינאריות: אם גם g רציפה למקוטעין בקטע חסום $[a, b]$ שהאינטגרל שלה מתכנס ו- $\alpha \in \mathbb{C}$, אז

$$\int_a^b (\alpha f(t) + g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

3. ניוטון-לייבניץ: אם $f(t)$ רציפה בקטע $[a, b]$ וכן $F'(t) = f(t)$ לכל $t \in [a, b]$ (כלומר, $U' = u$ ו- $V' = v$) אז

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

4. אי-שוויון המשולש האינטגרלי: $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

5. משפט ההערכה: $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \cdot (b - a)$.

התכונות נכונות באופן דומה גם לאינטגרלים בקטע לא חסום, בהנחה שהם מתכנסים.

בנוסף, מבחני ההשוואה והעיקרון כי התכנסות בהחלט גוררת התכנסות נכונים גם הם וניתנים להוכחה באופן דומה.

דוגמה: למשל אפשר לחשב שוב באמצעות ניוטון-לייבניץ:

$$\int_0^{\pi} e^{it} dt = -ie^{it} \Big|_0^{\pi} = i - ie^{i\pi} = 2i$$

1.2 הגדרה של התמרת לפלס ותכונות בסיסיות

הגדרה של התמרת לפלס

העיקרון הכללי של התמרה: בהינתן פונקציה $f(t)$, נגדיר פונקציה חדשה $F(s)$ שמכונה **התמרת לפלס** של f . זו פונקציה אחרת, שונה, שקשורה ל- f באופן לא מובן מאלינו.

הגדרה 2. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0, \infty)$. **התמרת לפלס** של f בנקודה $s \in \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי

$$\mathcal{L}[f](s) \equiv F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2)$$

בתנאי שהאינטגרל המוכלל מתכנס.

נשתמש בסימון $F(s)$ אלא אם אנו מתעסקים עם מספר רב של התמרות בו זמנית, שאז כדי למנוע בלבול נשתמש בסימון $\mathcal{L}$.

דוגמאות:

1. ניקח $f(t) \equiv 1$ אז

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

באופן דומה, אם $s \leq 0$ אז האינטגרל מתבדר.

2. ניקח $f(t) = e^{at}$ אז

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

באופן דומה, אם $s \leq a$ אז האינטגרל מתבדר.

לבסוף נעיר שהחשבון נשאר נכון אם $a \in \mathbb{C}$ אינו ממשי, בתנאי ש- $s > \operatorname{Re}(a)$.

בשתי הדוגמאות רואים כי $F(s)$ נראית לא קשורה לפונקציה המקורית $f(t)$.

בכל זאת, יתברר כי $F(s)$ יעילה מאוד בהבנת $f(t)$.

תנאי למוגדרות התמרת לפלס ושאיפה לאפס באינסוף

כפי שראינו בדוגמאות, התמרת לפלס $F(s)$ יכולה להיות מוגדרת לחלק מערכי $s \in \mathbb{R}$ ולא לאחרים. המשפט הבא נותן תנאי מספיק לכך שהיא מוגדרת החל ממקום מסוים.

משפט 3: תהי f רציפה למקוטעין בקטע $[0, \infty)$. נניח שקיימים $K > 0$ וכן $a \in \mathbb{R}$ עבורם

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

אז התמרת לפלס $F(s)$ מוגדרת לכל $s > a$, ובנוסף $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.

דוגמאות:

1. עבור $f(t) \equiv 1$, תנאי המשפט מתקיימים עם $K=1, a=0$ ובאמת קיבלנו כי $F(s) = \frac{1}{s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$, בנוסף, $s > 0$.

2. עבור $f(t) = e^{at}$, תנאי המשפט מתקיימים עם $K=1$ וה- a של המעריך, ובאמת קיבלנו כי $F(s) = \frac{1}{s-a} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$, בנוסף, $s > a$.

3. ניקח את הפונקציה $f(t) = \sin(at)$. תנאי המשפט מתקיימים עם $K=1, a=0$. אפשר לחשב באופן ישיר בעזרת אינטגרציות בחלקים, אבל נראה טריק בעזרת מספרים מרוכבים:

$$F(s) = \mathcal{L} \left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} \right] (s) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

נעיר שהשתמשנו כאן בלינאריות התמרת לפלס, כלומר למשל שההתמרה של סכום או הפרש של פונקציות מתקבלת כסכום או הפרש בהתאמה של ההתמרות של הפונקציות.

מיד ננסח ונוכיח את התכונה הזו.

4. ניקח את פונקצית המדרגה $u_c(t)$ שהגדרנו על ידי (1). נחשב:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) dt = \int_c^\infty e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_c^\infty = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$$

תכונות בסיסיות של התמרת לפלס

משפט 4. נניח כי f, g רציפות למקוטעין בקטע $[0, \infty)$.

1. לינאריות: אם התמרות לפלס F, G של f, g מוגדרות בנקודה s , אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים כי התמרת לפלס של $\alpha f(t) + \beta g(t)$ מוגדרת גם היא בנקודה s ובנוסף

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

2. כפל במעריך: לכל $a \in \mathbb{R}$, אם התמרת לפלס F של f מוגדרת בנקודה $s - a$ אז

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = F(s - a)$$

3. מתיחה וכיווץ: לכל $a > 0$, אם התמרת לפלס F של f מוגדרת בנקודה $\frac{s}{a}$ אז

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

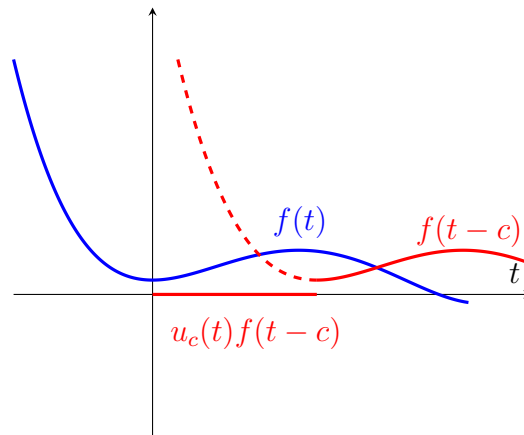
4. הזזה: לכל $c > 0$, אם התמרת לפלס F של f מוגדרת בנקודה s אז

$$\mathcal{L}[u_c(t) f(t - c)](s) = e^{-cs} F(s)$$

הערה: בנוסחת ההזזה, הביטוי $u_c(t) f(t - c)$ אינו מדויק.

למשל, אם $c = 2$ ו- $t = 1$, כתוב $u_2(1) f(-1)$. אבל הערך $f(-1)$ אינו חייב להיות מוגדר. מצד שני, $u_2(1) = 0$, כך שאם הוא מוגדר אז זה לא משנה מה ערכו והתוצאה בכל זאת 0.

ובאמת, בביטוי $u_c(t) f(t - c)$ הכוונה היא שאם $t < c$ אז הערך הוא 0 (גם אם $f(t - c)$ לא מוגדר).



דוגמאות:

1. נקבע $a, b \in \mathbb{R}$ ונחשב את התמרת לפלס של $f(t) = e^{at} \sin(bt)$.

בעזרת התכונות והתמרות שכבר חישבנו,

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin(bt)](s) = \mathcal{L}[\sin(bt)](s - a) = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2}, \quad s > a$$

2. נקבע $0 \leq a < b$ ונחשב את התמרת לפלס של

$$f(t) = \begin{cases} 1 & a < t \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נשים לב כי $f(t) = u_a(t) - u_b(t)$.

לכן בעזרת התכונות והתמרות שכבר חישבנו,

$$F(s) = \mathcal{L}[u_a - u_b](s) = \mathcal{L}[u_a](s) - \mathcal{L}[u_b](s) = \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}, \quad s > 0$$

1.3 התמרת לפלס ונגזרות

התמרה של נגזרת

משפט 5. תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה. נניח כי f גזירה פרט למספר סופי של נקודות בכל קטע חסום, וכן f' -רציפה למקוטעין בקטע $[0, \infty)$. נניח שקיימים $K > 0$, $a \in \mathbb{R}$ עבורם

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, \quad \forall t \geq 0$$

אז התמרת לפלס של f' מוגדרת לכל $s > a$ ובנוסף

$$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0), \quad s > a$$

כאשר F מסמנת כרגיל את התמרת לפלס של f .

הערה: אין הכרח כי f תהיה גזירה בכל הקטע $[0, \infty)$.

דוגמה: נוכל לחשב כעת את התמרת לפלס של $\cos(bt)$ בעזרת זו של $\sin(bt)$:

$$\mathcal{L}[\cos(bt)](s) = \mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{b} \sin(bt)\right)'\right](s) = \frac{1}{b} \left(s \cdot \frac{b}{s^2 + b^2} - 0\right) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

התמרה של נגזרת מסדר גבוה

נוכל להסיק בעזרת אינדוקציה פשוטה ממשפט 5 את המסקנה הבאה. נדגים ראשית עבור $n = 2$:

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s \cdot (sF(s) - f(0)) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

מסקנה: נניח כי $f, f', \dots, f^{n-1}$ קיימות ורציפות בקטע $[0, \infty)$, וכן שקיימים $K > 0, a \in \mathbb{R}$ עבורם

$$|f^{(k)}(t)| \leq Ke^{at}, \quad \forall t \geq 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

נניח בנוסף כי $f^{(n-1)}$ גזירה פרט למספר סופי של נקודות בכל קטע חסום, וכן כי $f^{(n)}$ רציפה למקוטעין בקטע $[0, \infty)$. אז התמרת לפלס של $f^{(n)}$ מוגדרת לכל $s > a$ ובנוסף

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

נגזרת של התמרה

משפט 6. תהי $f(t)$ רציפה למקוטעין בקטע $[0, \infty)$. נניח שקיימים $K > 0, a \in \mathbb{R}$ עבורם

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, \quad \forall t \geq 0$$

אז התמרות לפלס של f ושל $tf(t)$ מוגדרות לכל $s > a$, ובנוסף F גזירה עבור $s > a$ ומתקיים כי

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -F'(s)$$

באינדוקציה, נקבל מיד:

מסקנה: תחת תנאי משפט 6, התמרת לפלס F של f גזירה מכל סדר לכל $s > a$ וכן

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

דוגמאות נוספות של התמרות

דוגמאות:

1. בעזרת תכונת הנגזרת של התמרה והתמרות מוכרות,

$$\mathcal{L}[t^n](s) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} (\mathcal{L}[1](s)) = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^{(n)} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$$

2. נחשב את התמרת לפלס של הפונקציה

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ t^2 & t \geq 1 \end{cases}$$

במקרים כאלה רצוי למצוא ייצוג של הפונקציה בעזרת פונקציות הביסייד. במקרה הזה,

$$f(t) = u_1(t) \cdot t^2 = u_1(t) g(t-1)$$

כאשר $g(t) = (t+1)^2$. לכן לפי תכונת ההזזה,

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[u_1(t)g(t-1)](s) = e^{-s}\mathcal{L}[g](s) = e^{-s}\mathcal{L}[t^2 + 2t + 1](s) \\ &= e^{-s}\left(\frac{2!}{s^{2+1}} + 2 \cdot \frac{1!}{s^{1+1}} + \frac{1}{s}\right) = \frac{2 + 2s + s^2}{s^3 e^s} \end{aligned}$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. אינטגרלים מוכללים, ומבחני התכנסות עבורם.

“ Give me the positions and velocities of all the particles in the universe, and I will predict the future. ”

Pierre-Simon, Marquis de Laplace