

שבוע 10: אקספוננט של מטריצה, וריאציה של פרמטרים עבור מערכת מד"ר

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 מערכות של משוואות לינאריות (המשך)
2	1.1 וריאציה פרמטרים



1 | מערכות של משוואות לינאריות (המשך)

1.1 וריאצית פרמטרים

מטריצות יסודיות

עד כה עסקנו במציאת פתרון כללי של מערכת לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים. נעבור כעת למערכת אי הומוגנית,

$$\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) + \vec{g}(t) \quad (1)$$

התיאוריה הכללית של וריאצית פרמטרים תקפה לכל מערכת מהצורה (1). בכל זאת, כמו במקרה הסקלרי, נקודת המוצא תהיה פתרון כללי של המערכת ההומוגנית

$$\vec{x}_H(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + \dots + c_n \vec{x}_n(t) \quad (2)$$

הגדרה: נניח כי (2) הוא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית. המטריצה

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \uparrow & \dots & \uparrow \\ \vec{x}_1(t) & \dots & \vec{x}_n(t) \\ \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

מכונה **מטריצה יסודית** של המערכת ההומוגנית.

הערות:

- לכל בחירה של n פתרונות בלתי תלויים לינארית מתאימה מטריצה יסודית אחרת $\Psi(t)$.
- כל מטריצה יסודית היא הפיכה היות שעמודותיה בלתי תלויות לינאריות.

דוגמה: ראינו שהפתרון הכללי של המערכת

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

נתון על ידי

$$\vec{x}(t) = Ae^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + Be^{-t} \begin{pmatrix} -2t-1 \\ t \end{pmatrix}$$

לכן למערכת מתאימה מטריצה יסודית

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} & -(2t+1)e^{-t} \\ e^{-t} & te^{-t} \end{pmatrix}$$

תכונות של מטריצות יסודיות

בתת סעיף זה נתמקד עדיין במערכת ההומוגנית

$$\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) \quad (3)$$

משפט 1: תהי $\Psi(t)$ מטריצה יסודית של המערכת ההומוגנית (3) כאשר $A(t)$ רציפה בקטע I .

1. הפתרון הכללי (2) ניתן לכתיבה באופן הבא:

$$\vec{x}_H(t) = \Psi(t) \vec{c} \quad (4)$$

כאשר $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$ הוא וקטור (עמודה, שנכתב בשורה עם פסיקים למען הנוחות) של קבועים שרירותיים.

2. יהי $t_0 \in I$. הפתרון הפרטי היחיד של המערכת ההומוגנית (3) אשר מקיים את תנאי ההתחלה $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ נתון על ידי

$$\vec{x}_p(t) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0) \vec{x}_0 \quad (5)$$

3. לכל $t \in I$ מתקיים כי

$$\Psi'(t) = A(t) \Psi(t) \quad (6)$$

הערות:

- בהתחשב בנוסחה (5) עבור הפתרון הפרטי, לצרכים מסוימים נוח במיוחד להשתמש במטריצה היסודית אשר מתאימה לתנאי התחלה "סטנדרטים" $\Psi(t_0) = I_n$ (מטריצת היחידה).
- תוכן ההוכחה יראה כי $\Psi : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ היא מטריצה יסודית אם ורק אם היא מקיימת את המד"ר המטריצית (6) וכן קיים $t_0 \in I$ עבורו $\Psi(t_0)$ הפיכה.

השיטה של וריאצית פרמטרים

נניח כעת כי הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה למערכת (1) נתון על ידי (2), ותהי $\Psi(t)$ המטריצה היסודית המתאימה.

לפי משפט 1, ניתן לכתוב את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית באופן (4).

השיטה של וריאצית פרמטרים היא חיפוש של פתרון של המערכת האי הומוגנית (1) מהצורה

$$\vec{x}(t) = \Psi(t) \vec{c}(t) \quad (7)$$

כלומר,

$$\vec{x}(t) = c_1(t) \vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t) \vec{x}_n(t)$$

לא קשה לבדוק שהכלל לגזירה של מכפלה עובד גם למכפלת מטריצות, ולכן

$$\vec{x}'(t) = \Psi'(t) \vec{c}(t) + \Psi(t) \vec{c}'(t)$$

לפי משפט 1, הנגזרת של המטריצה היסודית נתונה על ידי (6). נציב למערכת (1) ונקבל את התנאי

$$A(t) \underbrace{\Psi(t) \vec{c}(t)}_{\vec{x}(t)} + \Psi(t) \vec{c}'(t) = A(t) \vec{x}(t) + \vec{g}(t)$$

לכן

$$\Psi(t) \vec{c}'(t) = \vec{g}(t) \quad (8)$$

כדאי להשתמש בשוויון הזה כאשר רוצים למצוא פתרון בפועל, בדוגמה נתונה. זו מערכת אלגברית לינארית עבור $c'_1(t), \dots, c'_n(t)$ שניתן לפתור ואז לעשות אינטגרציה.

בכל זאת, ניתן להגיע אפילו לנוסחה פשוטה עבור הפתרון הכללי של המערכת האי הומוגנית.

משפט 2: נניח כי $A(t), \vec{g}(t)$ רציפות בקטע I ויהי (2) הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה למערכת (1). תהי $\Psi(t)$ המטריצה היסודית המתאימה לפתרון כללי זה.

אז הפתרון הכללי של המערכת האי הומוגנית (1) נתון על ידי

$$\vec{x}_{\text{NH}}(t) = \Psi(t) \vec{c} + \Psi(t) \cdot \int \Psi^{-1}(t) \vec{g}(t) dt, \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^n \quad (9)$$

למעשה, האינטגרל באגף ימין של (9) מכיל קבועים שרירותיים אשר משחזרים את המחובר הראשון ולכן ניתן להתעלם מהם (או, לחילופין, מהמחובר הראשון).

אפשרות אחרת היא להשתמש באינטגרל מסוים מנקודה קבועה $t_0 \in I$ לנקודה כללית $t \in I$.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. תכונות יסודיות של אינטגרל רימן מחדו"א ב'1.

“ Often when you think you're at the end of something, you're at the beginning of something else. ”

Fred Rogers