

שבוע 9: מערכת הומוגנית עם מקדמים קבועים

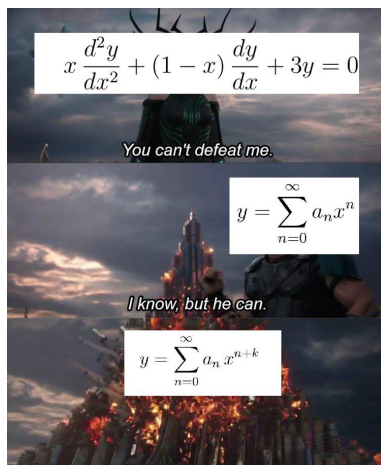
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1 מערכות של משוואות לינאריות (המשך)
2	1.1 מערכת לינארית עם מקדמים קבועים - ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברה שווה לריבוי גיאומטרי
2	1.2 מערכת לינארית עם מקדמים קבועים - ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי שגדול מריבוי גיאומטרי
6	1.3 תמונות פאזה
9	



תזכורות

מד"ר לינארית מנורמלת מסדר 2:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

1 | מערכות של משוואות לינאריות (המשך)

1.1 מערכת לינארית עם מקדמים קבועים - ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברה שווה לריבוי גיאומטרי

פתרונות יסודיים

מעתה נעסוק במערכת לינארית הומוגנית מסדר 1 עם מקדמים קבועים. כלומר, $A(t)$ כלל לא תלויה ב- t :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

בדומה למד"ר הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים, נוכל תמיד למצוא n פתרונות בלתי תלויים לינארית בהתבסס על **פתרונות יסודיים**. חשוב להבהיר שאין הכוונה שכל n הפתרונות יהיו יסודיים, אלא (כמו במקרה של מד"ר מסדר n) כל פתרון יסודי יניב מחובר אחד או יותר לפתרון הכללי לפי שיקולים אלגבריים.

נזכיר כי פתרון יסודי עבור מד"ר מסדר n היה ce^{rt} . באופן אנלוגי, פתרון יסודי עבור מערכת מד"ר הוא פתרון מהצורה $\vec{x}(t) = e^{rt}\vec{v}$ כאשר $\vec{v}$ וקטור. נציב למערכת:

$$\begin{cases} \vec{x}' = (e^{rt}\vec{v})' = re^{rt}\vec{v} \\ A\vec{x} = Ae^{rt}\vec{v} \end{cases} \Rightarrow A\vec{v} = r\vec{v}$$

אם $\vec{v} = 0$ תתקבל פונקציית האפס שהיא אמנם פתרון אבל לא תורמת למציאת הפתרון הכללי, ולכן מקרה זה לא מעניין. אם כך הבעיה היסודית שיש לפתור היא מציאת זוגות של ערך r עם וקטור $\vec{v}$ עבורם

$$A\vec{v} = r\vec{v}, \quad \vec{v} \neq 0$$

כלומר, הבעיה המרכזית היא של מציאת ערכים עצמיים וקטורים עצמיים של המטריצה A .

הוכחנו למעשה את המשפט הבא.

משפט 1: יהי $\vec{v} \neq 0$ וקטור קבוע.

הפונקציה הוקטורית $\vec{x}(t) = e^{rt} \vec{v}$ היא פתרון של המערכת ההומוגנית עם מקדמים קבועים

$$\vec{x}' = A \vec{x} \quad (2)$$

אם ורק אם r הוא ערך עצמי של A ו- v הוא וקטור עצמי של A השייך ל- r .

לכן בשלב ראשון יש למצוא את שורשי הפולינום האופייני של המטריצה A :

$$p(r) = \det(A - rI)$$

בשלב השני, לכל שורש (=ערך עצמי) יש למצוא מספר וקטורים עצמיים בלתי תלויים לפי הפירוט שנכלול בהמשך.

הגישה הכללית

דוגמה:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

הפולינום האופייני הוא

$$p(r) = \begin{vmatrix} 3-r & -2 \\ 2 & -2-r \end{vmatrix} = (r-2)(r+1)$$

נקבל שני ערכים עצמיים: $-1, 2$. עבור $r = 2$ נמצא וקטור עצמי מתאים לפי $(A - rI) \vec{v} = 0$:

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נקבל אם כך תרומה לפתרון שהיא $Ae^{2t}(2, 1) = (2Ae^{2t}, Ae^{2t})$.
עבור $r = -1$ נמצא וקטור עצמי מתאים:

$$0 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נקבל אם כך תרומה לפתרון שהיא $Be^{-t}(1, 2) = (Be^{-t}, 2Be^{-t})$.
בסך הכל מצאנו פתרון כללי למערכת:

$$\vec{x}(t) = (2Ae^{2t} + Be^{-t}, Ae^{2t} + 2Be^{-t})$$

נעיר שעבור ערך עצמי מרוכב $r = a + ib$ נמיר כפי שהתרגלנו את $e^{(a \pm ib)t}$ ל- $e^{at} \cos(bt)$, $e^{at} \sin(bt)$.

אם לכל ערך עצמי מתקיים שיש מספר וקטורים עצמיים בלתי תלויים שמתאימים לו ששווה לריבוי האלגברי שלו (**ריבוי גיאומטרי** = **ריבוי אלגברי**, כלומר A לכסינה) אז באופן הנ"ל נמצא פתרון כללי למערכת.

אם קיים וקטור עצמי שהריבוי הגיאומטרי שלו קטן מהריבוי האלגברי שלו, אז יהיו חסרים פתרונות מכיוון שאין מספיק וקטורים עצמיים. במקרה כזה נוכל למצוא בכל זאת מספיק פתרונות באמצעות **וקטורים עצמיים מוכללים**. נגיע לכך בקרוב.

ערך עצמי ממשי

נניח ש- r הוא ערך עצמי ממשי של A שהריבוי הגיאומטרי שלו שווה לריבוי האלגברי שלו, k . כלומר, יש לו k וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. במקרה זה r תורם לפתרון הכללי k מחוברים:

$$A_1 \vec{v}_1 e^{rt} + \dots + A_k \vec{v}_k e^{rt}$$

דוגמה:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

נעיר שסכום כל שורה במטריצה הוא 2 ולכן זה יהיה ערך עצמי. הפולינום האופייני הוא

$$p(r) = \begin{vmatrix} 4-r & -1 & -1 \\ 1 & 2-r & -1 \\ 1 & -1 & 2-r \end{vmatrix} = -r^3 + 8r^2 - 21r + 18$$

באמצעות ניחוש אינטליגנטי ובדיקת ריבוי, רואים ש-2 הוא שורש מריבוי 1 ו-3 הוא שורש מריבוי 2. לכן $p(r) = -(r-3)^2(r-2)$.

נמצא וקטורים עצמיים עבור $r=2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נמצא וקטורים עצמיים עבור $r=3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסך הכל נקבל פתרון כללי

$$\vec{x}(t) = (Ae^{2t} + Be^{3t} + Ce^{3t}, Ae^{2t} + Be^{3t}, Ae^{2t} + Ce^{3t})$$

אם כל הערכים העצמיים הם ממשיים עם ריבוי גיאומטרי ששווה לריבוי אלגברי, אז כל אחד תורם ריבוי אלגברי של מחוברים לפתרון הכללי. היות שסכום הריבויים האלגבריים של כל הערכים העצמיים הוא תמיד n , ואם נוכיח שהפתרונות המתקבלים הם בלתי תלויים, אז נקבל כך n פתרונות בלתי תלויים.

אם זה לא המצב, אז כל ערך עצמי מסוג אחר יצטרך בכל זאת לתרום ריבוי אלגברי של מחוברים. נצטרך להבין כיצד בהמשך.

ערך עצמי לא ממשי

נתחיל מהמקרה של ערך עצמי לא ממשי $r = a + ib$ עם ריבוי אלגברי ששווה ל-1. במקרה זה נקבל שני דברים:

- קיים וקטור עצמי (מרוכב) $\vec{v}$ שמתאים ל- r ולכן $e^{(a+ib)t}\vec{v}$ פתרון (מרוכב) של המערכת.
- גם $a - ib$ ערך עצמי, ו- $\overline{\vec{v}}$ וקטור עצמי שלו. לכן $e^{(a-ib)t}\overline{\vec{v}}$ גם פתרון של המערכת. נשים לב שזה בעצם כמו לכתוב $\overline{e^{(a+ib)t}\vec{v}}$.

לכן כמו במקרה של מד"ר אחת מסדר n , אפשר להמיר את שני הפתרונות המרוכבים האלה בשני פתרונות ממשיים שפורשים את אותו המרחב: החלק הממשי והמדומה של $e^{(a+ib)t}\vec{v}$.

ההבדל בהשוואה למקרה של מד"ר אחת מסדר n הוא ש- $\vec{v}$ עלול להיות לא ממשי בעצמו ולכן יש למצוא ראשית בזיהירות את $e^{(a+ib)t}\vec{v}$ כמכלול ואז להמיר אותו בחלקי הממשי והמדומה.

באופן זה שני הערכים העצמיים $a \pm ib$ מפיקים תרומה של שני מחוברים לפתרון הכללי:

$$A \operatorname{Re}(e^{rt}\vec{v}) + B \operatorname{Im}(e^{rt}\vec{v})$$

דוגמה:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

הפולינום האופייני הוא

$$p(r) = \begin{vmatrix} 3-r & -2 \\ 4 & -1-r \end{vmatrix} = r^2 - 2r + 5 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm 2i$$

נמצא וקטור עצמי עבור $r = 1 + 2i$ והוא כבר יפיק שני פתרונות עבור $1 \pm 2i$:

$$\cdot \begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

נקבל את הפתרון

$$e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t (\cos(2t) + i \sin(2t)) \\ e^t (\cos(2t) + \sin(2t)) + i [e^t \sin(2t) - e^t \cos(2t)] \end{pmatrix}$$

נקבל אם כן פתרון כללי שנתון כצירוף לינארי של החלק הממשי והמדומה של הביטוי הנ"ל:

$$\vec{x}(t) = A \begin{pmatrix} e^t \cos(2t) \\ e^t (\cos(2t) + \sin(2t)) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) \\ e^t \sin(2t) - e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$$

אם הריבוי האלגברי גדול מ-1, אז כל עוד הריבוי הגיאומטרי שווה לו, כל וקטור עצמי של $a + ib$ תורם כנ"ל שני מחוברים לפתרון הכללי. לכן שני הערכים העצמיים $a \pm ib$ יתרמו $2k$ מחוברים (k הוא הריבוי האלגברי שלהם) בהתאם למה שהיה נחוץ כדי להגיע ל- n פתרונות בסך הכל מהתרומות של כל הערכים העצמיים.

1.2 מערכת לינארית עם מקדמים קבועים - ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי שגדול מריבוי גיאומטרי

פתרון באמצעות ווקטור פולינומים

נעבור כעת למקרה של מערכת $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ שבה A אינה לכסינה. ליתר דיוק, נניח שמצאנו ערך עצמי r שהריבוי האלגברי שלו a גדול מהריבוי הגיאומטרי שלו g . נתמקד במקרה של r ממשי לכל אורך הדיון, אבל נציין לאחר כל אחת משתי השיטות שנכיר כיצד להתאים אותה למקרה של r לא ממשי.

אנחנו צריכים למצוא a מחוברים עבור הפתרון הכללי שמתאימים ל- r . השיטה הראשונה היא השיטה של ווקטור פולינומים. היא פשוטה מאוד לתיאור ולרוב קלה ליישום. בכל זאת, יש מקרים שבהם היא מסתבכת ובהם כדאי לנסות את השיטה השנייה שנראה בהמשך.

השיטה פשוטה: נסמן $k = a - g$ ונציב לתוך המערכת פתרון מוצע שצורתו

$$\vec{x}(t) = e^{rt} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} = e^{rt} \begin{pmatrix} A_{10} + A_{11}t + \cdots + A_{1k}t^k \\ \vdots \\ A_{n0} + A_{n1}t + \cdots + A_{nk}t^k \end{pmatrix}$$

משווים מקדמים ונשארים עם a דרגות חופש, כלומר, a פתרונות בלתי תלויים שמתאימים ל- r .

דוגמה:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

הפולינום האופייני הוא

$$p(r) = \begin{vmatrix} 1-r & 4 \\ -1 & -3-r \end{vmatrix} = (r+1)^2$$

לכן $r = -1$ הוא ערך עצמי יחיד עם $a = 2$, ומכיוון ש-

$$A - r \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A - rI) = 1$$

נקבל כי $g = 2 - 1 = 1$. כלומר, $g < a$, ובעצם $k = a - g = 1$. נציע אם כן פתרון

$$\vec{x}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} b + ct \\ d + ft \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}(b + ct) \\ e^{-t}(d + ft) \end{pmatrix}$$

נציב למערכת, נשווה ונקבל

$$\begin{cases} c - b = b + 4d \\ -c = c + 4f \\ f - d = -b - 3d \\ -f = -c - 3f \end{cases} \Rightarrow c = -2f, \quad b = -f - 2d$$

לכן בסך הכל

$$\vec{x}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} b + ct \\ d + ft \end{pmatrix} = e^{-t} \left(ft \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

לכן אם נסמן

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז קיבלנו פתרון כללי

$$\vec{x}(t) = d(t\vec{v} + \vec{u})e^{-t} + c\vec{v}e^{-t}$$

מתברר כי $\vec{v}$ וקטור עצמי של A אשר מתאים לערך העצמי $r = -1$, ומצד שני $\vec{u}$ אינו וקטור עצמי אבל הוא וקטור עצמי מוכלל. מיד נדבר על מושג זה.

במקרה הלא ממשי עושים כנ"ל אבל עם מקדמים שהם גם מרוכבים, ומקבלים a פתרונות מרוכבים בלתי תלויים. החלקים הממשיים והמדומים שלהם הם $2a$ פתרונות ממשיים בלתי תלויים אשר מתאימים ל- $r, \bar{r}$.

פתרון באמצעות שרשראות של וקטורים עצמיים מוכללים

השיטה הזו מתקדמת יותר מבחינה אלגברית אבל לרוב קצרה יותר מבחינה מעשית. כלומר, יש בה טעם אם מוכנים להתעמק קצת באלגברה.

אם r הוא ערך עצמי ממשי של A עם ריבוי אלגברי a שגדול מהריבוי הגיאומטרי g , אז אין a וקטורים עצמיים בלתי תלויים שמתאימים ל- r (יש בדיוק g).

מתברר שקיימים בכל זאת a וקטורים עצמיים מוכללים בלתי תלויים לינארית: וקטורים $\vec{v}$ עבורם קיים איזשהו $k \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים

$$(A - rI)^k \vec{v} = 0$$

במקרה זה, ניתן למצוא g וקטורים עצמיים כך שמתקיימים התנאים הבאים.

1. כל אחד מ- g הוקטורים העצמיים "מוליד" שרשרת של וקטורים עצמיים מוכללים באופן הבא.

נניח כי $\vec{v}$ הוא אחד מהוקטורים העצמיים. ראשית, מוצאים וקטור $\vec{v}_2$ אשר מקיים את התנאי $(A - rI) \vec{v}_2 = \vec{v}$ ומקבלים פתרון שני

$$(t\vec{v} + \vec{v}_2)e^{rt}$$

שנית, מוצאים וקטור $\vec{v}_3$ אשר מקיים את התנאי $(A - rI) \vec{v}_3 = \vec{v}_2$ ומקבלים פתרון שלישי

$$\left(\frac{t^2}{2} \vec{v} + t\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \right) e^{rt}$$

ממשיכים באופן זה עד שאין פתרון. כלומר, מקבלים שרשרת

$$\vec{v}_k \xrightarrow{A-rI} \vec{v}_{k-1} \xrightarrow{A-rI} \dots \xrightarrow{A-rI} \vec{v}_1 \equiv \vec{v} \xrightarrow{A-rI} 0$$

2. סכום אורכי השרשראות הוא a , כלומר, מתקבלים בסך הכל בדיוק a וקטורים עצמיים מוכללים שמתאימים ל- r .

דוגמה:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

ראינו שיש ערך עצמי אחד $r = -1$ עם $a = 2$ ו- $g = 1$. נמצא ווקטור עצמי מתאים:

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c = -2d \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מכיוון $a = 2$ אנחנו מצפים ש- $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}$ יוליד שרשרת קצרה

$$\vec{v}_2 \xrightarrow{A+I} \vec{v}_1 \xrightarrow{A+I} 0$$

של ווקטור עצמי מוכלל אחד נוסף ל- $\vec{v}$. כלומר, אנחנו רוצים למצוא $\vec{v}_2$ שמקיים את התנאי

$$\cdot (A + I) \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \iff \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2c + 4d = -2, \quad -c - 2d = 1$$

נקבל בעצם תנאי אחד $c = -1 - 2d$ ולכן

$$\cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 - 2d \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אפשר לבחור למשל $d = 0$ כי מספיק ווקטור אחד כזה, ונקבל לסיכום

$$\cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הסדר חשוב: זה יפיק שני פתרונות בלתי תלויים למערכת, שהם

$$\cdot \vec{x}_1(t) = e^{rt} \vec{v}_1, \quad \vec{x}_2(t) = e^{rt} (t \vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

לכן הפתרון הכללי נתון על ידי

$$\cdot \vec{x}(t) = A e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + B e^{-t} \begin{pmatrix} -2t - 1 \\ t \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -2Bt - 2A - B \\ A + Bt \end{pmatrix}$$

נעיר שאם ננסה למצוא ווקטור שלישי בשרשרת הנ"ל, יתקבל התנאי

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2c + 4d = -1, \quad -c - 2d = 0$$

אין לזה פתרון.

באופן כללי, לכל ווקטור עצמי $\vec{v} \equiv \vec{v}_1$ שמתאים ל- r מוצאים את השרשרת שמתאימה לו (היא נעצרת כאשר אין פתרון):

$$\cdot \vec{v}_k \xrightarrow{A-rI} \vec{v}_{k-1} \xrightarrow{A-rI} \dots \xrightarrow{A-rI} \vec{v}_1 \equiv \vec{v} \xrightarrow{A-rI} 0$$

השרשרת הזו מגיבה k פתרונות בלתי תלויים כדלקמן:

$$\cdot \begin{cases} \vec{x}_1(t) = e^{rt} \vec{v}_1 \\ \vec{x}_2(t) = e^{rt} (t \vec{v}_1 + \vec{v}_2) \\ \vdots \\ \vec{x}_k(t) = e^{rt} \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \vec{v}_1 + \dots + t \vec{v}_{k-1} + \vec{v}_k \right) \end{cases}$$

אם באופן זה מצאנו a וקטורים עצמיים מוכללים בסך הכל, סיימנו עם הערך עצמי r . אחרת, יש להחליף את g הוקטורים העצמיים מהם התחלנו, ואין כלל ברור כדי למצוא אילו וקטורים עצמיים לבחור.

1.3 תמונות פאזה

מבוא

בסעיף זה אנו נצייר תמונות פאזה עבור מערכת בגודל 2×2 של מד"ר, הומוגנית, מסדר 1, עם מקדמים קבועים:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

הציורים אינם מדויקים לחלוטין כמובן, וממילא תמונת פאזה מלאה תהיה מישור מלא (היות שבכל נקודה עובר פתרון). אבל נצייר מספר פתרונות כך שנוכל לקבל תחושה כללית ככל הניתן של צורת הפתרונות, של יציבות ושל יציבות אסימפטוטית עבור נקודת שיווי המשקל $(0, 0)$, ועוד.

נציין שיתכנו נקודות שיווי משקל נוספות, אם A אינה הפיכה. מקרה זה מורכב יותר, ולא נעסוק בו. בדרך כלל, כדאי לשרטט שדה כיוונים על מנת לפענח את תמונת הפאזה. במקרה הנוכחי, היות שמצאנו פתרון כללי במפורש, נוכל לרוב לצייר גם ללא מחשבה על שדה כיוונים (אם כי פה ושם, הוא יועיל).

ערכים עצמיים ממשיים ושונים בעלי סימן זהה

כפי שראינו, הפתרון הכללי של המערכת נתון במקרה זה על ידי

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A_1 e^{r_1 t} \cdot \vec{v}_1 + A_2 e^{r_2 t} \cdot \vec{v}_2 \quad (3)$$

כאשר $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ הם וקטורים עצמיים של A השייכים לערכים העצמיים r_1, r_2 בהתאמה.

במקרה $A_1 = 0$ נקבל $A_2 e^{r_2 t} \cdot \vec{v}_2$, קרן בכיוון $\pm \vec{v}_2$ (לפי הסימן של A_2).

באופן דומה, במקרה $A_2 = 0$ נקבל קרן בכיוון $\pm \vec{v}_1$ (לפי הסימן של A_1).

בשני המקרים, הקרן לא כוללת את הראשית (כצפוי לפי עיקרון אי החיתוך, היות שהראשית היא פתרון שיווי המשקל).

הקרנות הנ"ל מחלקות את המישור לארבעה אזורים, ולפי עיקרון אי החיתוך (שוב), כאשר $A_1, A_2 \neq 0$ נקבל פתרונות אשר מוכלים בכל פעם באחד מארבעת האזורים. האזור שבו הפתרון נמצא תלוי בסימנים של A_1, A_2 , כפי שנראה מיד.

בשלב זה, כדי לפענח בדיוק רב את תמונת הפאזה, נדון ראשית במקרה $r_1, r_2 < 0$. נעיר ששינוי הסימן של r_1, r_2 רק הופך את המגמה, ולכן נוכל לאחר מכן מיד להבין את תמונת הפאזה כאשר $r_1, r_2 > 0$.

ובכן, אם $r_1, r_2 < 0$ אז מצורת הפתרון (3) אנו רואים כי

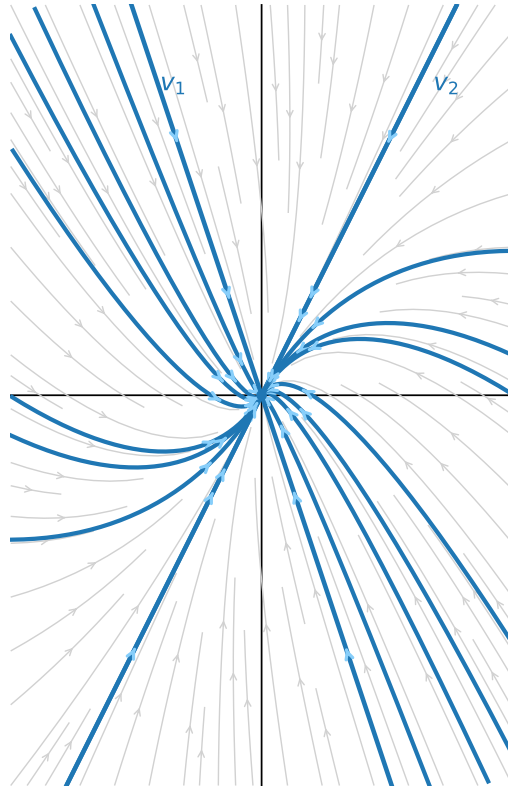
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

בנוסף, אלא אם $A_1 = A_2 = 0$, מתקיים כי $\lim_{t \rightarrow -\infty} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \infty$. כלומר, כל המסלולים "מגיעים מרחוק מאוד" ושואפים (אך לא מגיעים!) לפתרון שיווי המשקל.

נניח כעת בלי הגבלת הכלליות כי $r_1 < r_2$. היות שלפי (3) מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A_1 e^{r_1 t} \left(\vec{v}_1 + \frac{A_2}{A_1} e^{(r_2-r_1)t} \cdot \vec{v}_2 \right) = A_2 e^{r_2 t} \left(\frac{A_1}{A_2} e^{(r_1-r_2)t} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \right)$$

נקבל שעבור $t \rightarrow \infty$ הכיוון הוא בערך $\pm \vec{v}_2$, ועבור $t \rightarrow -\infty$ הכיוון הוא בערך $\pm \vec{v}_1$. לסיכום:



ניתן לראות מהציור (ולא קשה להוכיח מצורת הפתרון (3) תחת ההנחות $r_1 < r_2 < 0$) שפתרון שיווי המשקל $(0, 0)$ הוא יציב אסימפטוטית.

נסיים במקרה $r_1, r_2 > 0$, ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $r_1 > r_2 > 0$.

אז $-r_1 < -r_2 < 0$ ולכן נקבל את אותה תמונה כנ"ל, בהיפוך מגמה. בפרט, פתרון שיווי המשקל אינו יציב.

תמונה פאזה זו מכונה **צומת** (באנגלית, node). יש להכיר את השם.

במקרה ששני הערכים העצמיים שליליים נציין לפעמים צומת **יציבה** (nodal sink); ואם הם חיוביים אז צומת **לא יציבה** (nodal source).

הערה: בשני המקרים, למרות שהכיוון באינסוף הוא בערך $\pm \vec{v}_1$, הפתרונות הולכים ומתרחקים מהקרב שיוצאת מהראשית בכיוון זה. כלומר, רק הכיוון (ולא המיקום) מתיישר אסימפטוטית לפי $\vec{v}_1$.

ערכים עצמיים ממשיים ושונים בעלי סימן שונה

הפתרון הכללי עדיין נתון על ידי (3), אבל כעת (ללא הגבלת הכלליות) $r_1 < 0 < r_2$.

כמו קודם, במקרה $A_1 = 0$ נקבל $\vec{v}_2 \cdot A_2 e^{r_2 t}$, קרן בכיוון $\pm \vec{v}_2$ במגמה מהראשית לאינסוף.

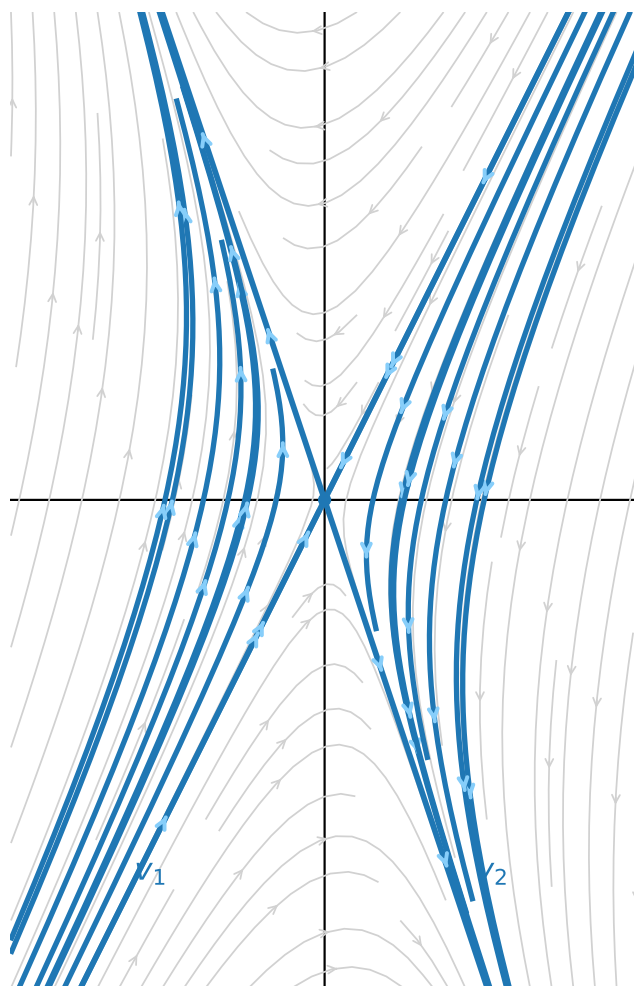
באופן דומה, במקרה $A_2 = 0$ נקבל קרן בכיוון $\pm \vec{v}_1$ אך במגמה מאינסוף לראשית.

אם $A_1, A_2 \neq 0$ אז מתקיים כי $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \infty$. כלומר, הפתרונות מגיעים מאינסוף והולכים לאינסוף. בנוסף, עבור $t \rightarrow \infty$ הכיוון הדומיננטי הוא $\pm \vec{v}_2$, ועבור $t \rightarrow -\infty$ הוא $\pm \vec{v}_1$.

לסיכום: הפתרונות עבור $A_1, A_2 \neq 0$ מגיעים מאינסוף בכיוון אסימפטוטי $\pm \vec{v}_1$, והולכים לאינסוף בכיוון אסימפטוטי $\pm \vec{v}_2$.

יותר מזה, בניגוד לצומת, לא רק הכיוון הוא אסימפטוטי - נסו להראות שהמרחק בין פתרון נתון לבין הפתרון המתאים עם $A_1 = 0$ שואף לאפס כאשר $t \rightarrow \infty$, ושהמרחק בין פתרון נתון לבין הפתרון המתאים עם $A_2 = 0$ שואף לאפס כאשר $t \rightarrow -\infty$.

התמונה תראה אם כן כך:



נשים לב שפתרון שיווי המשקל במקרה זה אינו יציב. נסו לקבוע - מה לגבי פתרונות אחרים?

תמונת פאזה זו מכונה **אוכף** (באנגלית, saddle).

ערכים עצמיים ממשיים ושווים עם ריבוי גיאומטרי 2

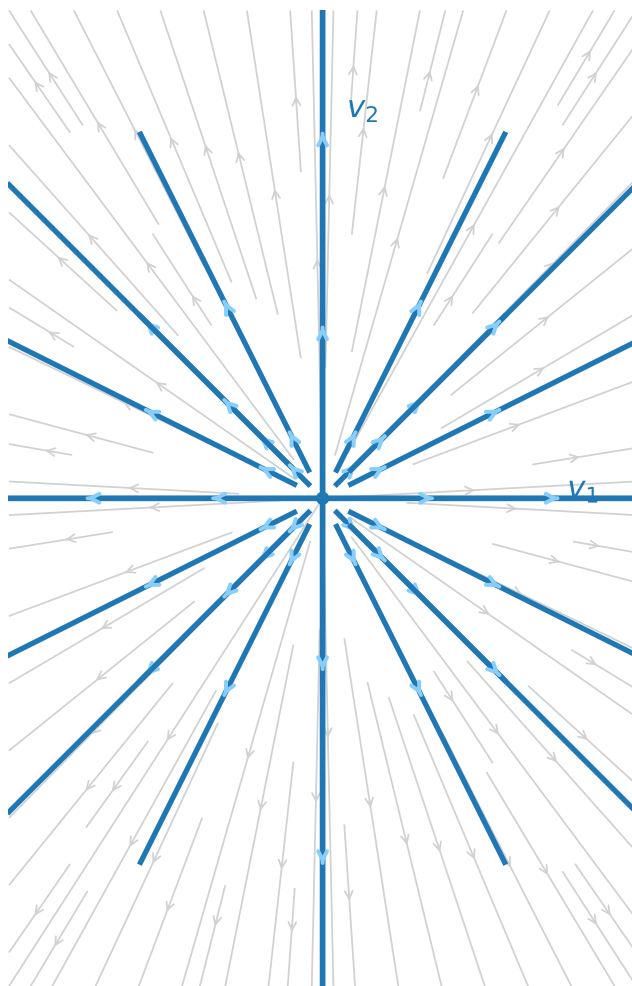
הפתרון הכללי עדיין נתון על ידי (3), אבל עם $r_1 = r_2$. נסמן ערך משותף זה על ידי r , ונקבל למעשה:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A_1 e^{rt} \cdot \vec{v}_1 + A_2 e^{rt} \cdot \vec{v}_2 = e^{rt} (A_1 \vec{v}_1 + A_2 \vec{v}_2)$$

כאשר $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ הם וקטורים עצמיים בלתי תלויים השייכים ל- r .

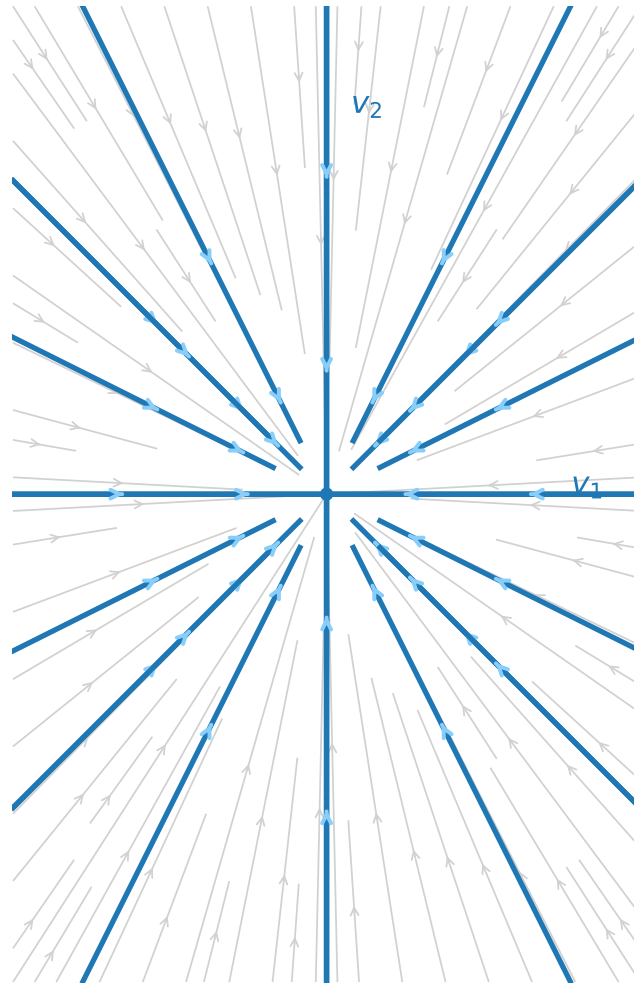
הביטוי $A_1 \vec{v}_1 + A_2 \vec{v}_2$ הוא לכן וקטור קבוע כללי, כך שכל פתרון הוא קרן אשר יוצאת מהראשית (אם $r > 0$) או נכנסת לראשית (אם $r < 0$).

לכן עבור $r > 0$, נקבל את התמונה:



נשים לב שבמקרה זה, פתרון שיווי המשקל אינו יציב.

עבור $r < 0$, נקבל את התמונה:



במקרה זה, פתרון שיווי המשקל הוא יציב אסימפטוטית.

תמונת פאזה כזו מכונה **כוכב** (באנגלית, star).

הערה: מקרה זה מתרחש אם ורק אם מטריצת המקדמים של המערכת היא סקלרית, עם r על האלכסון.

ערכים עצמיים ממשיים ושווים עם ריבוי גיאומטרי 1

כפי שראינו, במקרה זה הפתרון הכללי הוא בעל צורה אחרת מכל המקרים הקודמים:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A_1 e^{rt} (t \vec{v}_2 + \vec{v}_1) + A_2 e^{rt} \cdot \vec{v}_2 = e^{rt} (A_1 (t \vec{v}_2 + \vec{v}_1) + A_2 \vec{v}_2)$$

כאשר $\vec{v}_2$ הוא וקטור עצמי השייך לערכי העצמי r , ו- $\vec{v}_1$ הוא וקטור המקיים $(A - rI) \vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

נצייר ראשית במקרה $r > 0$, ולאחר מכן נהפוך כיוונים עבור המקרה $r < 0$.

כמו קודם, במקרה $A_1 = 0$ נקבל $A_2 e^{rt} \cdot \vec{v}_2$, קרן בכיוון $\pm \vec{v}_2$ במגמה מהראשית לאינסוף.

בשונה מהמקרים הקודמים, המקרה $A_2 = 0$ הוא לא מידי: נקבל $A_1 e^{rt} (t \vec{v}_2 + \vec{v}_1)$.

בכל זאת, ניתן לראות שכאשר $t \rightarrow \pm\infty$, הכיוון הוא בערך $\vec{v}_2$:

$$A_1 e^{rt} (t \vec{v}_2 + \vec{v}_1) = A_1 t e^{rt} \left(\vec{v}_2 + \frac{1}{t} \vec{v}_1 \right)$$

למעשה, זה נכון עבור הפתרון הכללי ולא רק במקרה $\pm A_2 = 0$:

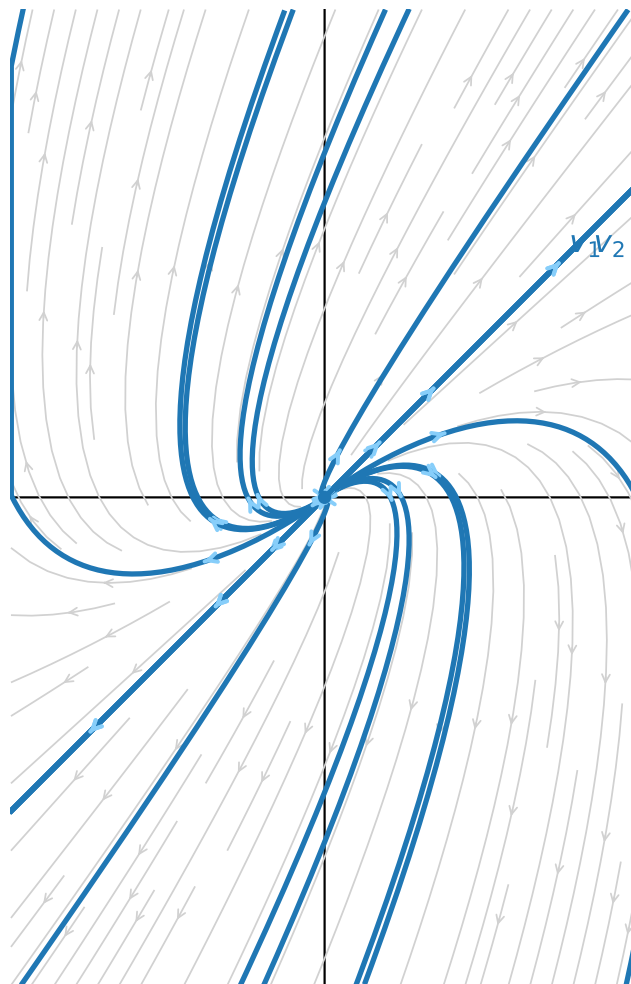
$$e^{rt} (A_1 (t \vec{v}_2 + \vec{v}_1) + A_2 \vec{v}_2) = t e^{rt} \left(A_1 \vec{v}_2 + \frac{1}{t} (A_1 \vec{v}_1 + A_2 \vec{v}_2) \right)$$

נשים לב גם שיש היפוך כיוון בין $t \rightarrow -\infty$ לבין $t \rightarrow \infty$, כלומר, אם עבור $t \rightarrow -\infty$ הכיוון הוא בערך $\vec{v}_2$, אז עבור $t \rightarrow \infty$ הוא בערך $-\vec{v}_2$ (ולהיפך).

בנוסף, מתקיים כי

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0 \text{ וכן } \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \infty$$

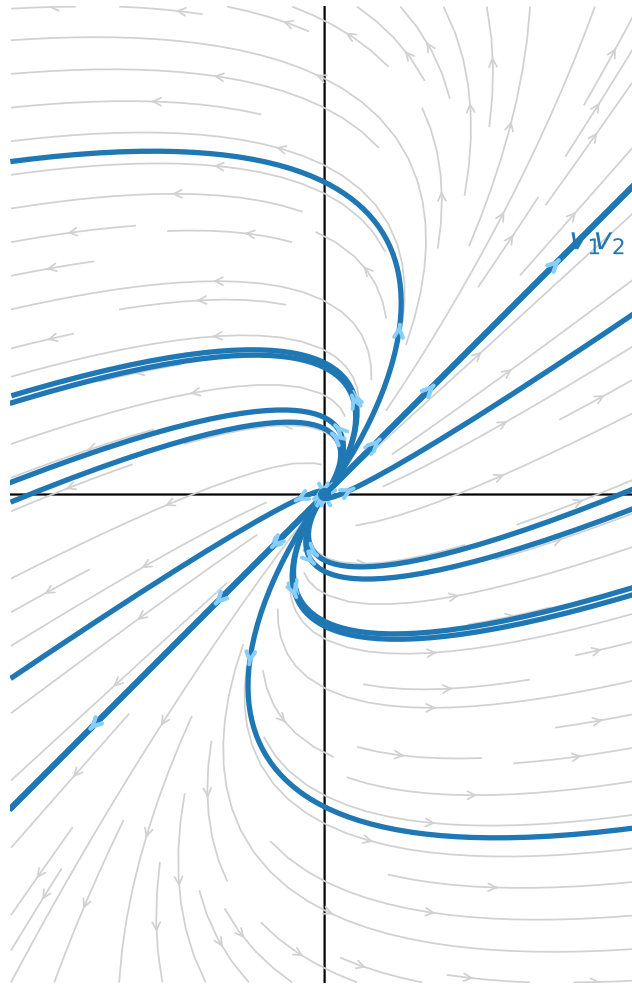
לכן המגמה היא מכיוון הראשית במקביל אסימפטוטית לוקטור $\pm \vec{v}_2$, לאינסוף במקביל אסימפטוטית לוקטור $\mp \vec{v}_2$ (אך באינסוף, רק מבחינת כיוון ולא מבחינת מרחק). בסך הכל, נקבל:



במקרה זה, פתרון שיווי המשקל אינו יציב; אם $r < 0$, נקבל את אותה תמונה בהיפוך מגמות, ופתרון שיווי המשקל הוא יציב אסימפטוטית.

תמונת פאזה זו מכונה **צומת מנוון** (באנגלית, degenerate note).

נעיר שצומת מנוון (למשל, במקרה $r > 0$) יכולה להיראות גם כך:



כדי לקבוע מהי התמונה הנכונה, נוכל להיעזר בשדה כיוונים: נחשב את הכיוון המשיק בנקודה $(0, 1)$ (למשל), כלומר, את

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אם $\vec{v}_2 \pm$ ברביע הראשון והשלישי (כמו בציור), בתמונה הראשונה אנו מצפים כי $a, b > 0$ ובשניה $a, b < 0$ (אם $r < 0$, זה מתהפך).

אם $\vec{v}_2 \pm$ ברביע השני והרביעי, קובעים באופן דומה.

ערכים עצמיים מדומים טהורים

נסמן $r_1 = i\beta$, כאשר $\beta \neq 0$. אז $r_2 = -i\beta$ (הצמוד), והפתרון הכללי נתון הפעם על ידי

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A_1 \vec{w}_1(t) + A_2 \vec{w}_2(t)$$

כאשר $\vec{w}_1(t) = \text{Re}(e^{i\beta t} \vec{v})$, $\vec{w}_2(t) = \text{Im}(e^{i\beta t} \vec{v})$ עבור וקטור עצמי $\vec{v}$ השייך ל- $r_1 = i\beta$.

כדי להבין את תמונת הפאזה המתקבלת, נסמן $\vec{v} = (a + ib, c + id)$ ונחשב את

$$e^{i\beta t} \vec{v} = (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \cdot \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t) \\ c \cos(\beta t) - d \sin(\beta t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t) \\ c \sin(\beta t) + d \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

לכן

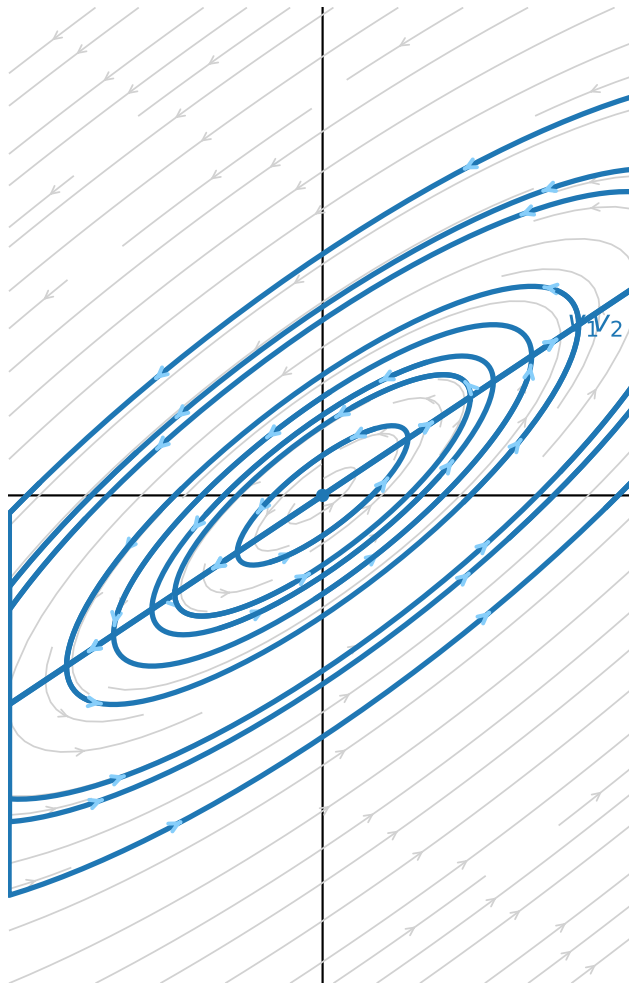
$$\vec{w}_1(t) = \begin{pmatrix} a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t) \\ c \cos(\beta t) - d \sin(\beta t) \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2(t) = \begin{pmatrix} a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t) \\ c \sin(\beta t) + d \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

לפי זהויות טריגונומטריות, $\vec{w}_1\left(t - \frac{\pi}{2\beta}\right) = \vec{w}_2(t)$. לכן התמונה של $\vec{w}_2(t)$ זהה לתמונה של $\vec{w}_1(t)$.

למעשה, נראה מיד שכל נקודה במישור הפאזה שייכת לתמונה של $A_1 \vec{w}_1(t)$ עבור A_1 מתאים. לכן, לפי עיקרון אי החיתוך, אלו כבר נותנים את כל תמונת הפאזה.

ואכן, ניתן להוכיח כי $\vec{w}_1(t)$ היא פרמטריזציה של אליפסה המקיפה את הראשית (זה ניתן כתרגיל).

לכן $\{A_1 \vec{w}_1(t), A_1 \in \mathbb{R}\}$ מהווה כיסוי של $\mathbb{R}^2$, ונקבל את תמונת הפאזה:



כדי לקבוע את המגמה ואת הנטייה של האליפסה, נוכל שוב להיעזר בשדה כיוונים (למשל, בנקודה $(0, 1)$).

כדי לקבוע את האליפסה במדויק, יש למצוא אלגברית את ציר הסיבוב ואת אורכי חצאי הצירים - אין צורך לעשות זאת בצירור של תמונות פאזה בקורס זה.

תמונת פאזה זו מכונה **מרכז** (באנגלית, center).

פתרון שיווי המשקל במקרה זה הוא יציב אך לא יציב אסימפטוטית.

ערכים עצמיים לא ממשיים ולא מדומים

נסמן $r_1 = \alpha + i\beta$, כאשר $\alpha, \beta \neq 0$. אז $r_2 = \alpha - i\beta$ (הצמוד), והפתרון הכללי נתון הפעם על ידי

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A_1 \vec{w}_1(t) + A_2 \vec{w}_2(t)$$

כאשר $\vec{w}_1(t) = \operatorname{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t} \vec{v})$, $\vec{w}_2(t) = \operatorname{Im}(e^{(\alpha+i\beta)t} \vec{v})$ השייך ל- $r_1 = \alpha + i\beta$. עבור וקטור עצמי $\vec{v}$

נסמן כמו קודם $\vec{v} = (a + ib, c + id)$. בעזרת החישוב הקודם, מתקיים כי

$$e^{(\alpha+i\beta)t} \vec{v} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} \vec{v} = e^{\alpha t} \left(\begin{pmatrix} a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t) \\ c \cos(\beta t) - d \sin(\beta t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t) \\ c \sin(\beta t) + d \cos(\beta t) \end{pmatrix} \right)$$

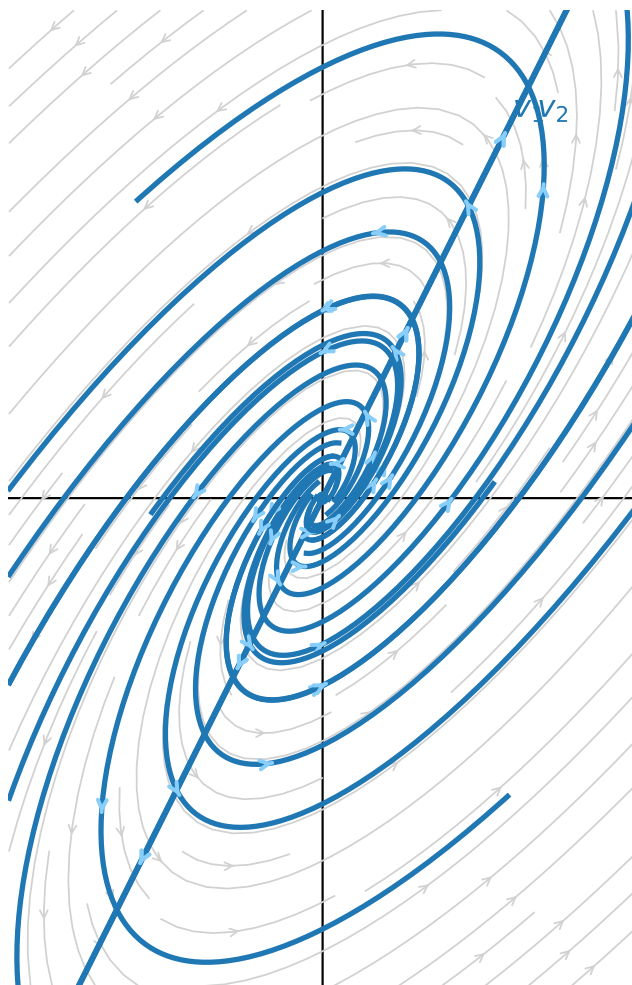
לכן

$$\vec{w}_1(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t) \\ c \cos(\beta t) - d \sin(\beta t) \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t) \\ c \sin(\beta t) + d \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

נראה מיד, כמו קודם, שכל נקודה במישור הפאזה שייכת לתמונה של $A_1 \vec{w}_1(t)$ עבור A_1 מתאים. לכן, לפי עיקרון אי החיתוך, אלו כבר נותנים את כל תמונת הפאזה.

ואכן, בעזרת המקרה הקודם, $\vec{w}_1(t) = e^{\alpha t} \cdot \vec{u}(t)$, כאשר $\vec{u}(t)$ היא פרמטריזציה של אליפסה המקיפה את הראשית. לכן אם $\alpha > 0$, נקבל ספירלה אליפטית אשר שואפת לראשית כאשר $t \rightarrow -\infty$ ולאנסוף כאשר $t \rightarrow \infty$ (ואם $\alpha < 0$, אז להיפך).

לכן $\{A_1 \vec{w}_1(t), A_1 \in \mathbb{R}\}$ מהווה כיסוי של $\mathbb{R}^2$, ונקבל את תמונת הפאזה:



פתרון שיווי המשקל במקרה זה הוא יציב אסימפטוטית אם $\alpha < 0$, ולא יציב אם $\alpha > 0$.

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. וקטורים עצמיים וערכים עצמיים של מטריצה.
2. לכסון ולכסינות של מטריצה (כולל התנאים על ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי).

“

18