

שבוע 8: מערכות של מד"ר לינאריות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	מערכות של משוואות לינאריות
2	1.1	מערכת כללית של מד"ר מסדר 1
4	1.2	מרחב פאזה
10	1.3	מערכת לינארית של מד"ר מסדר 1

When you have to solve a differential equation by assuming a solution in the form of an infinite power series



1 | מערכות של משוואות לינאריות

1.1 מערכת כללית של מד"ר מסדר 1

הגדרה של מערכת מד"ר וסימון וקטורי

בפרק זה נעסוק במערכת של מספר מד"ר שיש בהן מספר פונקציות נעלמות. מעתה המשתנה יסומן t , ובמקום פונקציה נעלמת אחת $y(x)$ יהיו כעת מספר פונקציות נעלמות $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

דוגמאות:

1. מערכת מסדר 1:

$$\begin{cases} te^{x'y} - y' \sin(t^2x) = 3 \\ xy' + x'y = t^3 \end{cases}$$

2. מערכת מסדר 1:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x^2 - 4y \end{cases}$$

זו מערכת שאינה לינארית בגלל x^2 במד"ר השנייה.

בניגוד למערכת הקודמת, היא כתובה בצורה מוצלחת יותר: x', y' חולצו כפונקציות של x, y, t .

3. מערכת מסדר 2:

$$\begin{cases} x'' = x - y \\ y' = y \end{cases}$$

אין כל הכרח שכל המד"ר יהיו מאותו סדר. זו מערכת לינארית.

הערה: אם $n = 2$ נסמן $x(t), y(t)$ ואם $n = 3$ אז כנ"ל עם $z(t)$, כדי לחסוך אינדקסים כשניתן.

אנחנו נעסוק בפירוט רק במערכות לינאריות מסדר 1, אבל לפני כן נדבר מעט בכלליות על מערכות מד"ר מסדר 1 שאינן בהכרח לינאריות.

הגדרה: מערכת של מד"ר מסדר 1 היא מערכת מהצורה

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) = 0 \end{cases}$$

כאשר לפחות אחת מבין $F_1, \dots, F_n$ באמת תלויה בלפחות אחת מבין $x'_1, \dots, x'_n$.

אם אפשר, נחלץ ונכתוב כך:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

סימון וקטורי: $\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$.

קיום יחידות

משפט פיקארד לינדלוף תקף למערכת של מד"ר, עם הוכחה אנלוגית.

משפט 1: אם $(t_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in U$ כאשר $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ קבוצה פתוחה וכל הפונקציות הבאות רציפות ב- U :

$$f_1, \dots, f_n, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

אז קיים $h > 0$ כך שבקטע $[t_0 - h, t_0 + h]$ יש פתרון יחיד למערכת.

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{\alpha} \end{cases}$$

כלומר, תנאי ההתחלה הוא

$$\begin{cases} x_1(t_0) = \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = \alpha_n \end{cases}$$

יציבות

ההגדרות של יציבות ושל יציבות אסימפטוטית עבור מערכת של מד"ר מסדר 1 הן אנלוגיות למקרה של מד"ר יחידה מסדר 1, והאינטואיציה מאחורי מושגים אלה היא דומה מאוד.

התועלת של ההגדרה, מצד שני, תתבטא במיוחד כאשר נדבר על מרחב פאזה (בקרוב): כך יתאפשר לנו לדון ולהבין יציבות של מערכות מורכבות, אשר מיוצגות על ידי מד"ר מסדר גבוה (או מערכת של כאלה).

הגדרה: תהי $F(t, \vec{x}, \vec{x}') = 0$ מערכת של מד"ר מסדר 1 והי $\vec{x}(t)$ פתרון של המערכת שמוגדר בקטע $[t_0, \infty)$.

1. נאמר שהפתרון $\vec{x}(t)$ הוא יציב בקטע $[t_0, \infty)$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל פתרון $\vec{y}(t)$ של המערכת שמקיים $|\vec{y}(t_0) - \vec{x}(t_0)| < \delta$ מתקיים כי $\vec{y}(t)$ מוגדר בקטע $[t_0, \infty)$ ובנוסף $|\vec{y}(t) - \vec{x}(t)| < \varepsilon$ לכל $t \geq t_0$.

2. נאמר שהפתרון $\vec{x}(t)$ הוא יציב אסימפטוטית בקטע $[t_0, \infty)$ אם הוא יציב בקטע ובנוסף קיים $\delta > 0$ כך שלכל פתרון $\vec{y}(t)$ של המערכת שמקיים $|\vec{y}(t_0) - \vec{x}(t_0)| < \delta$ מתקיים כי $\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{y}(t) - \vec{x}(t)| = 0$.

באופן דומה מגדירים עבור יציבות בקטע $(-\infty, t_0]$.

הערה: לעיתים אומרים "יציב מימין ל- t_0 " או "עבור $t \rightarrow \infty$ " (ובאופן דומה, משמאל או עבור $t \rightarrow -\infty$).

יציבות מימין היא ברירת המחדל, אם לא מציינים במפורש. זאת מכיוון שבאופן טיפוסי, המשתנה t מייצג זמן, והזמן מתקדם "ימינה". כנ"ל עבור יציבות אסימפטוטית.

פתרון ללא שיטות נוספות

לעיתים ניתן לפתור את המערכת אד הוק. במקרים כאלה כמובן שאין כל צורך בתורה כללית.

דוגמה:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$$

ואכן, לפי המשוואה השנייה נקבל $y(t) = c_2 e^t$. לכן המשוואה הראשונה היא

$$x' = x + c_2 e^t$$

$$\text{נפתור: } (e^{-t}x)' = c_2 \text{ ולכן } x = c_2 t e^t + c_1 e^t$$

הערה: במקרה המיוחד שהמערכת היא מהצורה $\vec{x}'(t) = \vec{f}(\vec{x})$, כלומר $f_1, \dots, f_n$ תלויות רק ב- $x_1, \dots, x_n$ ולא במשתנה t , המערכת מכונה **אוטונומית** (כנ"ל במקרה של מערכת כללית $(\vec{F}(\vec{x}, \vec{x}') = 0$). למשל:

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y^2 \\ y' = \sin(x) + y \end{cases}$$

במקרה זה, $\vec{f}(\vec{x})$ הוא למעשה **שדה וקטורי** והפתרונות $\vec{x}(t)$ של המערכת מכונים **קוים אינטגרלים** של השדה הוקטורי.

לקוים אינטגרלים יש שימושים רבים. למשל, אם $\vec{f}(\vec{x})$ הוא שדה מגנטי, קוי השדה מאפשרים לקבל תחושה אינטואיטיבית כללית של התנהגות מטענים בהשפעת השדה.

1.2 מרחב פאזה

הקשר בין מערכת מד"ר לבין מסדר גבוה

ניתן להמיר מד"ר מסדר n למערכת של n מד"ר מסדר 1 באופן פשוט. נניח שהמד"ר היא

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

נתאים את $y(t)$ לפונקציה הראשונה $x_1(t)$ ויתר הפונקציות יוגדרו כנגזרות:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

באופן זה, אם $\vec{x}(t)$ פתרון ונסמן $y(t) = x_1(t)$, אז $x_2 = x'_1 = y'$, $x_3 = x'_2 = y''$ וכן הלאה, עד $x_n = y^{(n-1)}$ ולבסוף

$$x'_n = y^{(n)} = f(t, x_1, \dots, x_n) = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

דוגמה: נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 4y' - y = t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$$

נעביר אותה לבעיה של מערכת מד"ר:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + t \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = -2 \end{cases}$$

נשים לב שפתרון של כל אחת מהבעיות מיד נותן פתרון של הבעיה האחרת.

באופן דומה, אפשר גם להמיר מערכת של מד"ר מכל סדר למערכת (גדולה יותר, בדרך כלל) של מד"ר מסדר ראשון.

זהירות: בד"כ לא ניתן להמיר מערכת של n מד"ר למד"ר מסדר n .

מרחב פאזה

התהליך של המרת (מערכת) מד"ר מסדר גבוה למערכת מד"ר מסדר 1, מביא אותנו למושג חשוב ומועיל במיוחד: מרחב פאזה.

דוגמאות:

1. תנועה הרמונית פשוטה מתוארת על ידי המד"ר $x'' + \omega^2 x = 0$.

נסמן $y = x'$ ונקבל את המערכת

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix}$$

בדרך כלל, כדי לתאר את המערכת בזמן מסוים $t = t_0$, יש לציין את המיקום ואת המהירות של הגוף אשר מבצע את התנועה ההרמונית: $(x(t_0), x'(t_0))$.

באמצעות הסימון $y = x'$ ובשפת מערכת המד"ר הנ"ל, זה שקול לציון של נקודה $(x(t_0), y(t_0))$ במישור xy .

למשל, הנקודה $(0, 0)$ פירושה שהגוף נמצא בנקודת שיווי משקל, במנוחה. זו נקודה יציבה: אם המערכת נמצאת שם, היא תישאר שם. כלומר,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מהווה פתרון.

באופן זה, מישור xy הופך להיות קבוצת כל המצבים האפשריים של המערכת. נקודה במישור xy אינה נקודה פיזית שבה הגוף יכול להימצא, אלא נקודה אבסטרקטית של "מצב התנועה".

בהקשר זה, מישור xy מכונה **מרחב פאזה** עבור המערכת.

ניקח דוגמה נוספת. הנקודה $(0,1)$ פירושה שהגוף נמצא בנקודת שיווי המשקל, עם מהירות רגעית 1 (ביחידות המתאימות) ימינה. זו לא נקודה יציבה, והמערכת תזוז ממנה מיד לנקודות אחרות. מעניין למשל להבין מהו המסלול של המערכת לאחר הנקודה הזו: הפתרון הכללי של המד"ר המקורית הוא

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), y(t) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)$$

ולכן הפתרון אשר מקיים את תנאי ההתחלה

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

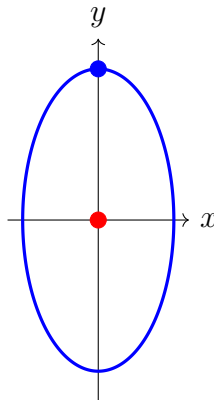
הוא

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$$

במרחב הפאזה, נקבל

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) = x'(t) = \cos(\omega t) \end{cases}$$

זה מתאר אליפסה:



במרחב הפאזה האבסטרקטי, המערכת נעה לאורך האליפסה הכחולה. אפשר לראות את המשרעת של התנועה (הציר הקצר של האליפסה במקרה זה), ואת המשרעת של המהירות (הציר הארוך).

אפשר גם לראות, כצפוי, שהמהירות היא מקסימלית כאשר הגוף נמצא בנקודה $x=0$.

2. נניח שנתונה המערכת

$$\begin{cases} y_1'' = y_2' - y_1 + t \\ y_2'' = y_1'' + y_2 \end{cases}$$

נוכל להמיר גם אותה למערכת מד"ר מסדר 1, על ידי

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = x'_1; \quad x_3 = y_2, \quad x_4 = x'_3, \quad x_5 = x'_4$$

נקבל את המערכת

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_4 - x_1 + t \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = x_5 \\ x'_5 = x'_2 + x_3 = x_4 - x_1 + t + x_3 \end{cases}$$

מרחב הפאזה המתאים הוא כעת $\mathbb{R}^5$, ופתרון של המערכת המקורית מתאים שוב למסלול במרחב הפאזה (כבר אי אפשר לצייר): $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t))$.

באופן כללי, **מרחב הפאזה** הוא $\mathbb{R}^n$, כאשר n הוא הסכום של סדרי הגזירה הגבוהים לכל אחת מהפונקציות הנעלמות. כדאי לחשוב על n בתור מספר דרגות החופש של המערכת: כל נקודה ב- $\mathbb{R}^n$ היא אפשרית, וקובעת את שאר הנגזרות.

פתרון הוא מסלול במרחב הפאזה (ליתר דיוק, וזה יהיה חשוב מיד: פתרון הוא **פרמטריזציה** של מסלול במרחב הפאזה).

תמונת הפאזה

נרצה לצייר תמונות של פתרונות של מערכת מד"ר נתונה מסדר 1 (שבדרך כלל נתקבל לאחר המרה של מד"ר או מספר מד"ר מסדר גבוה).

היתרון בכך, הוא שנקבל המחשה ויזואלית של הפתרונות. מצד שני, צריך לזכור, מרחב הפאזה הוא מופשט - הנקודות בו (ומסלולים בתוכו) אינם מייצגים תנועה פיזית ממשית, אלא את מכלול דרגות החופש במערכת (למשל, מיקום ומהירות יחד).

פתרון של מערכת מד"ר מסדר 1 הוא **מסלול**

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

התמונה של הפתרון היא תת קבוצה של $\mathbb{R}^n$.

דוגמאות:

1. אם פתרון נתון כל ידי

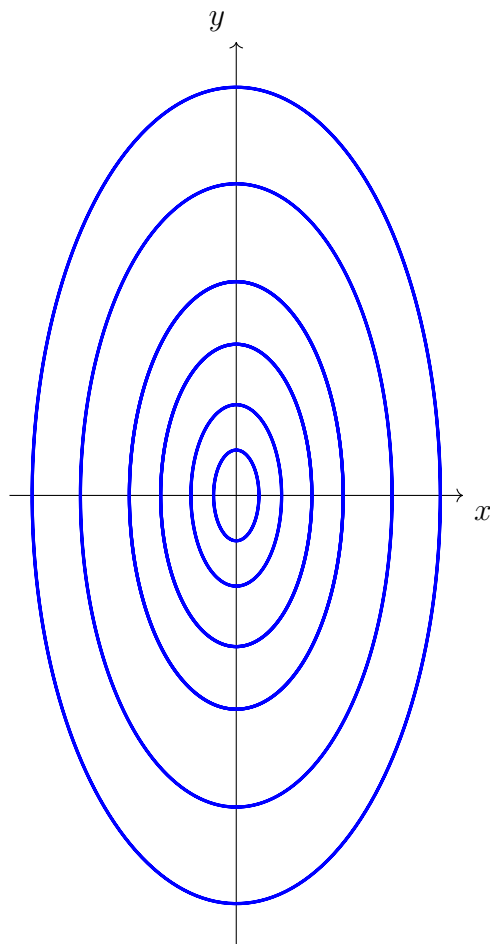
$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

אז תמונת הפתרון היא מעגל היחידה, $x^2 + y^2 = 1$. למעגל זה יש כמובן פרמטריזציות אחרות, ולכן יתכן שיש פתרון אחר (שונה) בעל ציור זהה. למשל,

$$x(t) = \cos(t-1), \quad y(t) = \sin(t-1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

2. בחזרה לדוגמה של תנועה הרמונית פשוטה, אכן מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות. היות שהמד"ר המקורית היא מסדר 2, פתרונות בכל זאת יכולים להיחתך, בתנאי שהם אינם משיקים.

במרחב הפאזה, כל נקודה מכילה גם את האינפורמציה על המהירות, וחיתוך פירושו גם השקה. לכן **במרחב הפאזה, עיקרון אי החיתוך חוזר להיות נכון** (זה לא מדויק לחלוטין – מיד נדייק). נצייר מספר פתרונות:



לפי הציור, מסתמן שהפתרון $(0,0)$ הוא יציב אך לא יציב אסימפטוטית: פתרונות אשר מתחילים קרוב אליו נשארים קרובים, אך אינם שואפים אליו.

זו גם דוגמה טובה שבה אי אפשר לבחור $\delta = \varepsilon$ בהגדרת היציבות: פתרון אשר מתחיל קרוב לנקודה $(0,0)$ יכול **קצת** להתרחק.

נדגיש שגם אם יש קיום ויחידות, יתכן חיתוך בין פתרונות שונים: שני פתרונות יכולים לעבור בנקודה נתונה $x_0 \in \mathbb{R}^n$ בזמנים שונים, מבלי שזה יהווה סתירה ליחידות. למשל, יתכן $\vec{y}(1) = 0$, $\vec{x}(0) = 0$. בציור, אנחנו נראה חיתוך בין העקומים המתאימים (חיתוך לא חייב להתרחש באותו זמן).

מצד שני, אם נחשוב על חלקיקים אשר מטיילים במרחב הפאזה, הם לא באמת יפגשו (אם יש קיום ויחידות): חלקם אולי יעברו באותו מקום, אך בזמנים שונים.

בכל זאת, וזה יהיה לנו חשוב: אם המערכת אוטונומית (אין תלות מפורשת במשתנה t) ומתקיימת בה יחידות, אז מסלולים שונים לא יכולים להיחתך. מיד נוכיח.

הגדרה: קבוצת כל התמונות (כולל מגמה) של הפתרונות של מערכת מד"ר מסדר 1 מכונה **תמונת הפאזה** שלה.

בדוגמה של תנועה הרמונית פשוטה, ציירנו סכמטית את תמונת הפאזה. היא נותנת לנו סוג שונה של מידע בהשוואה לפתרונות המפורשים: ראינו למשל מיד שהפתרון של מנוחה בנקודת שיווי המשקל הוא יציב אך לא יציב אסימפטוטית.

עיקרון אי החיתוך למערכות אוטונומיות

כפי שהסברנו, באופן כללי, תמונות של פתרונות שונים יכולות להיחתך - גם אם במערכת יש יחידות. במקרה של מערכת אוטונומית, שהוא המקרה בו נתמקד בציור תמונות פאזה, נראה כעת שהבעיה הזו לא קיימת.

משפט 2: תהי $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ מערכת מד"ר אוטונומית מסדר 1.

1. אם $\vec{x}(t)$ פתרון של המערכת, אז לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\vec{x}(t - \alpha)$ גם פתרון של המערכת (בתחום הגדרתו).

2. אם $\vec{f}$ היא פונקציה גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^n$ (מספיק למעשה שתהיה גזירה ברציפות בסביבת התמונה של אחד מהפתרונות) אז תמונות של שני פתרונות הן זהות או לא נחתכות.

נקודות שיווי משקל

הגדרה: תהי $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ מערכת מד"ר אוטונומית מסדר 1.

נקודת שיווי משקל של המערכת היא נקודה $\vec{x}_0$ שבה $\vec{f}(\vec{x}_0) = 0$.

זה שקול לכך שהפונקציה הקבועה $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$ (נקודה בודדת במישור הפאזה) היא פתרון של המערכת.

הערה: אם יש יחידות, אז פתרונות אחרים לא יכולים לעבור בנקודת שיווי משקל.

זה לא תואם לאינטואיציה שלנו מהעולם: מטוטלת עוברת שוב ושוב בנקודת שיווי המשקל שלה. הפער הוא שאנחנו חוקרים את המערכת במרחב הפאזה המופשט, שבו הנקודה כוללת גם מידע על המהירות. במובן זה, מטוטלת שמתנדנדת לא עוברת בנקודת שיווי המשקל לעולם - הרי זה היה אומר שהיא נמצאת במנוחה (גם אם רגעית) במצב אנכי. זה כמובן לא יתכן, אם היא לא במצב זה באופן קבוע.

יציבות במרחב הפאזה

כדי להבין היטב התנהגות של מערכת, חשוב לדעת לגבי נקודות שיווי המשקל אם הן יציבות (ואם הן יציבות אסימפטוטית).

ניקח למשל מד"ר מסדר 2, שהומרה למערכת של 2 מד"ר מסדר 1. היות שמרחב הפאזה מכיל את y' בתור אחד מהרכיבים, יציבות פירושה ש- y, y' נשארים שניהם קרובים לערכי ההתחלה, אם הם מתחילים מספיק קרוב.

למשל, בדוגמה של תנועה הרמונית, ראינו שכל אליפסה נשארת במרחק דומה מפתרון שיווי המשקל $(0, 0)$.

1.3 מערכת לינארית של מד"ר מסדר 1

צורה כללית של מערכת לינארית מסדר 1, סימון מטריצי

הגדרה: מערכת לינארית של מד"ר מסדר 1 היא מערכת מהצורה

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + g_n(t) \end{cases}$$

בסימון מטריצי נקבל את הייצוג הנוח

$$\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) + \vec{g}(t)$$

כאשר

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \vec{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$$

הם וקטורי עמודה שנכתבים לצורך נוחות הרישום בשורה עם פסיקים.

הסימון $A(t)$ הוא עבור מטריצת המקדמים של המד"ר שתלויה במשתנה t :

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

הפונקציה $\vec{g}(t)$ מכונה החלק האי הומוגני.

נאמר שהמערכת הומוגנית כאשר $\vec{g}(t) \equiv 0$, ואחרת נאמר שהיא אי הומוגנית.

דוגמה: נתונה המערכת

$$\begin{cases} x' = 2tx - t^2y \\ y' = -4x + (\sin t)y - t \end{cases}$$

הייצוג המטריצי שלה הוא

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2t & -t^2 \\ -4 & \sin t \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix}}_{\vec{g}(t)}$$

עיקרון הסופרפוזיציה

עיקרון הסופרפוזיציה עובד באופן זהה למקרה של מד"ר אחת:

משפט 3: אם נתונים שני פתרונות של המערכת עם חלקים אי-הומוגניים שאינם בהכרח זהים:

$$\vec{u}'(t) = A(t) \vec{u}(t) + \vec{g}(t), \quad \vec{v}'(t) = A(t) \vec{v}(t) + \vec{h}(t)$$

אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\vec{x}(t) = \alpha \vec{u}(t) + \beta \vec{v}(t)$ פותר את המערכת עם חלק אי-הומוגני מתאים:

$$\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) + \alpha \vec{g}(t) + \beta \vec{h}(t)$$

הוכחת המשפט זהה למקרה של מד"ר אחת.

בפרט, הפתרונות של המערכת ההומוגנית מהווים מרחב וקטורי, ובנוסף ניתן לכתוב פתרון כללי של המערכת האי-הומוגנית כפתרון כללי של ההומוגנית ועוד פתרון פרטי של אי-הומוגנית:

$$\vec{x}_{NH}(t) = \vec{x}_p(t) + \vec{x}_H(t)$$

קיום יחידות עבור מערכת לינארית של מד"ר

בדומה למד"ר בודדת, משפט הקיום והיחידות הרבה יותר נוח עבור מערכת לינארית.

משפט 4: אם הפונקציות $a_{ij}(t)$ וכן $g_i(t)$ רציפות בקטע I , אז לכל $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ מתקיים כי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) + \vec{g}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד בסביבת $t = t_0$, והוא מוגדר בכל I .

בדומה למקרה של מד"ר מסדר n , ניתן להסיק ממשפט זה:

מסקנה: תחת תנאי המשפט, מרחב הפתרונות במקרה ההומוגני הוא בעל מימד n .

אכן, לא קשה להוכיח שתנאי ההתחלה

$$\vec{x}^{(i)}(t_0) = \vec{e}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

מובילים לקבוצה פורשת ובלתי תלויה לינארית של פתרונות.

לכן כדי למצוא פתרון כללי במקרה ההומוגני יש למצוא n פתרונות בת"ל.

אי-תלות של פתרונות

נניח שנתונות פונקציות $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_m(t)$ שמוגדרות בקטע I . כלומר,

$$\vec{x}_i(t) = (x_{i1}(t), \dots, x_{in}(t))$$

הפירוש של תלות לינארית כזכור: קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ לא כולם 0 כך ש-

$$\alpha_1 \vec{x}_1(t) + \dots + \alpha_m \vec{x}_m(t) \equiv 0, \quad t \in I$$

זה יעניין אותנו בעיקר במקרה $m = n$ היות שאנחנו מחפשים n פתרונות בלתי-תלויים למערכת של n מד"ר. במקרה כזה התנאי הנ"ל של תלויים לינארית גורר כי המטריצה שעמודותיה הם הוקטורים $\vec{x}_i(t)$ אינה הפיכה.

הגדרה 5. הורונסקיאן של $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ מוגדר על ידי

$$W[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n](t) = \begin{vmatrix} \uparrow & \dots & \uparrow \\ \vec{x}_1(t) & \dots & \vec{x}_n(t) \\ \downarrow & \dots & \downarrow \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

לפי הדיון הנ"ל, המשפט הבא הוא מיידי.

משפט 6: תהי $t_0 \in I$. אם $W[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n](t_0) \neq 0$ אז $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ בלתי תלויים לינארית ב- I .

זה אנלוגי לגמרי למקרה של וורונסקיאן עבור פונקציות סקלריות, ובאמת אם מעבירים מד"ר מסדר n למערכת מד"ר אז מתקבל הוורונסקיאן המוכר:

$$\vec{x}_j = \begin{pmatrix} y_j \\ y'_j \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

דוגמה: ניקח את שתי הפונקציות הוקטוריות $\vec{u}_1(t) = (\cos t, \sin t)$ ו- $\vec{u}_2(t) = (-\sin t, \cos t)$.

נחשב את הוורונסקיאן

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2](t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$$

בכל קטע I יש t_0 כך שזה לא 0 ולכן הם בלתי תלויים לינארית.

תנאי מספיק לתלות לינארית

האנלוגיה נכונה גם עבור הכיוון השני: אינו נכון באופן כללי, אבל עבור פתרונות של מערכת לינארית עם מקדמים רציפים משפט הקיום והיחידות מאפשר להסיק את הרצוי. ויש אפילו נוסחת אָפֶּל.

משפט 7: תהי $t_0 \in I$ ונניח כי $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ פתרונות של המערכת $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$ כאשר $A(t)$ רציפה. אם $W[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n](t_0) = 0$ אז $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ תלויים לינארית ב- I .

לא נפרט את ההוכחה, אבל היא זהה למקרה של מד"ר אחת בהתבסס על משפט הקיום והיחידות.

בדוגמה הקודמת רואים שגם אם קיים t_0 כך ש- $W(t_0) = 0$, הם לא דווקא תלויים לינארית. למעשה, אפילו אם לכל t מתקיים כי $W(t) = 0$, זה רק גורר שקיימים $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)$ עבורם

$$\alpha_1(t) \vec{x}_1(t) + \dots + \alpha_n(t) \vec{x}_n(t) = 0$$

זה לא מספיק, כי נחוצים קבועים.

מסקנה: תהי $t_0 \in I$ ונניח כי $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ פתרונות של המערכת $\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t)$ כאשר $A(t)$ רציפה. התנאים הבאים שקולים:

1. $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ בלתי תלויים לינארית ב- I .

2. קיים $t_0 \in I$ כך ש- $W[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n](t_0) \neq 0$.

3. לכל $t \in I$ מתקיים $W[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n](t) \neq 0$.

וכנ"ל עם תלויים לינארית ושוויון לאפס.

נוסחת אבל

משפט 8: תהי $t_0 \in I$ ונניח כי $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ פתרונות של המערכת $\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t)$ כאשר $A(t)$ רציפה. אז $W(t) := W[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n](t)$ מקיים כי

$$W'(t) = \text{tr}(A(t)) W(t)$$

$$\text{בפרט, } W = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(t)) dt}$$

לצורך הוכחת המשפט, נשתמש בנוסחה לגזירה של דטרמיננטה, שנוכיח באופן חלקי. למשל,

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} = \frac{d}{dt} (ad - bc) = a'd + ad' - b'c - bc' = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}$$

באופן דומה ובאינדוקציה (שלא נפרט), מתקיים כי

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \leftarrow & R_1(t) & \rightarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \leftarrow & R_n(t) & \rightarrow \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \leftarrow & R'_1(t) & \rightarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \leftarrow & R_n(t) & \rightarrow \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \leftarrow & R_1(t) & \rightarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \leftarrow & R'_n(t) & \rightarrow \end{vmatrix} \quad (1)$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. הטור ההרמוני והסכומים החלקיים שלו.

2. קבוע אוילר מסקרוני.

Analysis takes back with one hand what it gives with the other. I recoil in fear and loathing from that deplorable evil: continuous functions with no derivatives.

”

Charles Hermite