

שבוע 7: השוואת מקדמים, פתרון בעזרת טורי חזקות

יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

3	1 מד"ר לינארית מסדר גבוה עם מקדמים קבועים (המשך)
3	1.1 השיטה של השוואת המקדמים
8	2 פתרון מד"ר בעזרת פיתוח לטור חזקות
8	2.1 פתרון בעזרת טורי חזקות סביב נקודה רגולרית



תזכורות

מד"ר אי הומוגנית מנורמלת:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \quad (1)$$

הצורה הכללית של מד"ר לינארית הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים היא

$$L[y] := a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2)$$

כאשר $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ו- $a_n \neq 0$.

1 | מד"ר לינארית מסדר גבוה עם מקדמים קבועים (המשך)

1.1 השיטה של השוואת המקדמים

חלק אי הומוגני אשר מתאים לשורש ממשי

נניח שנתונה מד"ר לינארית אי-הומוגנית עם מקדמים קבועים

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b(x) \quad (3)$$

השיטה של השוואת מקדמים היא שיטת סיסטמטית למציאת פתרון פרטי עבור המד"ר (3), במקרה המיוחד שהחלק האי הומוגני $b(x)$ הוא בעצמו ביטוי שפותר איזושהי מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים.משפט 1: נניח שהחלק האי הומוגני של המד"ר (3) הוא מהצורה $b(x) = Ae^{\alpha x}$ כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$. אז קיים פתרון פרטי יחיד שצורתו $y_p(x) = Bx^s e^{\alpha x}$ כאשר s הוא הריבוי של α בפולינום האופייני של המד"ר (3).

הערות:

- אם α כלל אינו שורש אז $s = 0$.
- היחידות במשפט היא עבור צורת הפתרון הפרטי המסוימת הזו. יש כמובן אינסוף פתרונות פרטיים שונים באופן כללי.

נוכיח את המשפט עוד מעט, בגרסתו הכללית שננסח מיד. ראשית נתרגל למשמעות שלו דרך דוגמאות.

דוגמאות:

1. $y'' + y = e^x$. כאן $\alpha = 1$ והפולינום האופייני הוא $r^2 + 1$. לכן α אינו שורש, כלומר $s = 0$ וננחש פתרון פרטי $y = Be^x$. נציב למד"ר:

$$e^x = y'' + y = Be^x + Be^x = 2Be^x \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

כלומר, $y = \frac{1}{2}e^x$. היות ששורשי הפולינום האופייני הם $\pm i$ נקבל פתרון כללי

$$y = \frac{1}{2}e^x + A \cos x + B \sin x$$

2. $y'' - y = e^x$. כאן $\alpha = 1$ והפולינום האופייני הוא $r^2 - 1$. השורשים הם ± 1 מריבוי 1 ולכן $s = 1$. לכן ננחש פתרון פרטי $y = Bxe^x$. נציב למד"ר:

$$e^x = y'' - y = B(2e^x + xe^x) - Bxe^x = 2Be^x \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

כלומר, $y = \frac{1}{2}xe^x$. לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = \frac{1}{2}xe^x + Ae^x + Be^{-x}$$

3. $y'' - 2y' + y = e^x$. כאן $\alpha = 1$ והפולינום האופייני הוא $r^2 - 2r + 1$. יש שורש אחד $r = 1$ בעל ריבוי 2. לכן $s = 2$ וננחש פתרון פרטי $y = Bx^2e^x$. נציב למד"ר:

$$e^x = y'' - 2y' + y = B(2e^x + 4xe^x + x^2e^x) - 2B(2xe^x + x^2e^x) + Bx^2e^x = 2Be^x \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

כלומר, $y = \frac{1}{2}x^2e^x$. לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = \frac{1}{2}x^2e^x + Ae^x + Bxe^x$$

4. $y''' - 2y'' = 4$. מתקיים כי $4 = 4e^{0x}$ ולכן $\alpha = 0$. הפולינום האופייני הוא $r^3 - 2r^2$.

לכן $r = 1$ הוא בעל ריבוי 2. לכן $s = 2$ וננחש פתרון פרטי $y = Bx^2$.

אפשר כעת להציב למד"ר כמו קודם ולמצוא את B .

הכללה עבור חלק אי הומוגני אשר מתאים לשורש ממשי

אם החלק האי הומוגני הוא בעל צורה $Axe^{\alpha x}$ אז מנחשים $x^s(Bx + C)e^{\alpha x}$. באופן כללי יותר:

משפט 2. נניח שהחלק האי הומוגני של המד"ר (3) הוא מהצורה $b(x) = p_m(x)e^{\alpha x}$ כאשר $p_m(x)$ פולינום ממעלה m . אז קיים פתרון פרטי יחיד שצורתו

$$y_p(x) = x^s (A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0) e^{\alpha x}$$

כאשר s הוא הריבוי של α בפולינום האופייני של המד"ר (3).

מוצאים את הקבועים $A_0, \dots, A_m$ על ידי הצבה לתוך המד"ר והשוואת מקדמים.

דוגמה: $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$ כאן $\alpha = 1$ והפולינום האופייני הוא $r^2 - 2r + 1$. יש שורש אחד $r = 1$ בעל ריבוי 2. לכן $s = 2$. בנוסף, ישנו פולינום ממעלה 2 שכופל את e^x ולכן ננחש פתרון פרטי $y = (Ax^2 + Bx + C)x^2e^x$. אז

$$y'' = [Ax^4 + (8A + B)x^3 + (12A + 6B + C)x^2 + (6B + 4C)x + 2C]e^x$$

נציב למד"ר:

$$(x^2 + 1)e^x = y'' - 2y' + y = [12Ax^2 + 6Bx + 2C]e^x$$

$$\Rightarrow 12Ax^2 + 6Bx + 2C = x^2 + 1 \Rightarrow A = \frac{1}{12}, B = 0, C = \frac{1}{2}$$

כלומר, $y = \left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}\right)x^2e^x$. לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = \left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}\right)x^2e^x + Ae^x + Bxe^x$$

נציין שבזכות עיקרון הסופרפוזיציה, אם החלק האי-הומוגני הוא סכום של מספר מחוברים, אז ניתן למצוא פתרון פרטי עבור כל מחובר בנפרד ובסוף לחבר את הפתרונות הפרטיים שמצאנו.

חלק אי הומוגני אשר מתאים לשורש לא ממשי

המשפט הבא מוכח באופן דומה.

משפט 3. נניח שהחלק האי הומוגני של המד"ר (3) הוא מהצורה

$$b(x) = p_m(x)e^{ax}\cos(bx) + \tilde{p}_m(x)e^{ax}\sin(bx)$$

כאשר $p_m(x), \tilde{p}_m(x)$ פולינומים ממעלה m לכל היותר, ואחד מהם ממעלה m בדיוק. אז קיים פתרון פרטי יחיד שצורתו

$$y_p(x) = x^s [(A_mx^m + \dots + A_0)e^{ax}\cos(bx) + (B_mx^m + \dots + B_0)e^{ax}\sin(bx)]$$

כאשר s הוא הריבוי של $a \pm ib$ בפולינום האופייני של המד"ר (3).

מוצאים את $A_0, \dots, A_m, B_0, \dots, B_m$ על ידי הצבה לתוך המד"ר והשוואת מקדמים.

הערות:

- יתכן שאחד משני הפולינומים בחלק האי הומוגני $b(x)$ הוא פולינום האפס, כך שלמעשה יש רק את אחד משני המחוברים.
- חובה לכלול את שני המחוברים בצורת הפתרון גם אם בחלק האי הומוגני אחד מהם חסר.

דוגמאות:

$$1. \quad y'' - 2y' + y = \cos x \quad \text{כאן } a=0, b=1 \quad \text{כלומר מדובר בערך } r=i.$$

הפולינום האופייני הוא $r^2 - 2r + 1$ ולכן $s=0$. לכן ננחש

$$y(x) = A \cos x + B \sin x$$

נציב למד"ר וכך נמצא את A, B :

$$\cos x = y'' - 2y' + y = -A \cos x - B \sin x - 2(-A \sin x + B \cos x) + A \cos x + B \sin x$$

לכן

$$2A \sin x - 2B \cos x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2A = 0 \\ -2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 0, \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{לכן קיבלנו } y(x) = -\frac{1}{2} \sin x$$

$$2. \quad y'' - y = e^x \cos(x) \quad \text{כאן } a=1, b=1 \quad \text{ולכן מדובר בערך } r=1+i.$$

הפולינום האופייני הוא $r^2 - 1$ ולכן $s=0$ (וכן $m=0$).

לכן ננחש $y(x) = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$. מוצאים את A, B כמו קודם על ידי הצבה למד"ר.

סיכום שיטת השוואת המקדמים

אם החלק האי הומוגני הוא אחד מהבאים, אז קיים פתרון פרטי פשוט שניתן למצוא ללא קושי רב.

חלק אי-הומוגני	מה מנחשים	כאשר s הוא
$e^{\alpha x}$	$Ax^s e^{\alpha x}$	ריבוי של α
$p_m(x) e^{\alpha x}$	$q_m(x) x^s e^{\alpha x}$	ריבוי של α
$p_m(x) e^{ax} \cos(bx) + \tilde{p}_m(x) e^{ax} \sin(bx)$	$x^s e^{ax} (q_m(x) \cos(bx) + \tilde{q}_m(x) \sin(bx))$	ריבוי של $a \pm ib$

הערות:

- אם החלק האי הומוגני הוא סכום של ביטויים של כל אחד מהם ניתן לנחש פתרון, אז מבצעים את הניחושים בנפרד ובסוף מחברים אותם.
- השוואת מקדמים לא עוזרת במקרה כמו $L[y] = \frac{e^x}{x}$ אבל אפשר לעשות הורדת סדר או וריאציה של פרמטרים.
- במקרה כמו $L[y] = xe^{2x} - 4e^x + \tan x$ מוצאים פתרון פרטי לכל מחובר בשיטה מתאימה.
- עבור משוואת אוילר אי הומוגנית, עושים הצבה $x = e^t$ ואז אפשר לנסות השוואת מקדמים עם המד"ר במקדמים קבועים שמתקבלת.

תהודה

נתבונן במד"ר $y'' + \omega_0^2 y = \sin(\omega t)$, כאשר ω_0 ו- ω הם פרמטרים חיוביים.

המשמעות של ω_0 היא המהירות העצמית של המערכת בהיעדר כל כוח מניע חיצוני. ניתן להבין זאת ביתר דיוק אם כותבים את הפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית: הפולינום האופייני הוא $r^2 + \omega_0^2$ ולכן שורשיו $r = \pm \omega_0 i$. כלומר, הפתרון של ההומוגנית:

$$y = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

מדובר בתנועה מחזורית עם זמן מחזור $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

החלק האי הומוגני הוא כוח חיצוני אשר פועל בתדירות ω .

נחפש כעת פתרון פרטי באמצעות השוואת מקדמים. כאן $a = 0, b = \omega$ ולכן מדובר בערך $r = i\omega$.

הפולינום האופייני הוא $r^2 + \omega_0^2$ ולכן שורשיו $\pm i\omega_0$ מריבוי 1 כל אחד.

אם $\omega \neq \omega_0$ אז $s = 0$ ולכן ננחש

$$y(x) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

נציב למד"ר ונקבל

$$\sin(\omega t) = y'' + \omega_0^2 y = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) + \omega_0^2 A \cos(\omega t) + \omega_0^2 B \sin(\omega t)$$

לכן

$$\begin{cases} 1 = B(\omega_0^2 - \omega^2) \\ 0 = A(\omega_0^2 - \omega^2) \end{cases} \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

לכן נקבל

$$y(x) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

אם $\omega = \omega_0$ אז $s = 1$ ולכן ננחש

$$y(t) = At \cos(\omega_0 t) + Bt \sin(\omega_0 t)$$

נציב למד"ר ונקבל

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) = y'' + \omega_0^2 y &= A(-2\omega_0 \sin(\omega_0 t) - \omega_0 t^2 \cos(\omega_0 t)) \\ &+ B(2\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 t \sin(\omega_0 t)) + A\omega_0^2 t \cos(\omega_0 t) + B\omega_0^2 t \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

נשווה מקדמים ונקבל

$$\begin{cases} 1 = -2A\omega_0 \\ 0 = 2B\omega_0 \\ 0 = -\omega_0^2 B + \omega_0 B \\ 0 = -\omega_0^2 A + \omega_0^2 A \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = 0$$

לכן קיבלנו

$$y(t) = -\frac{1}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t)$$

לסיכום, במקרה $\omega \neq \omega_0$ נקבל פתרון מחזורי. במקרה $\omega = \omega_0$ נקבל פתרון לא חסום.

הפירוש הוא שכאשר הכוח המאלץ עובד בתדירות העצמית של המערכת, המשרעת הולכת וגדלה עד אינסוף. זה נקרא **תהודה**.

דוגמה מפורסמת היא הגשר Tacoma Narrows Bridge אשר לפי האגדה האורבנית קרס כתוצאה מרוח בעלת תדירות השווה לתדירות עצמית של הגשר. האמת אולי קצת יותר מורכבת, אבל זה בכל אופן מעניין. הנה **סרטון** של הארוע.

2 | פתרון מד"ר בעזרת פיתוח לטור חזקות

2.1 פתרון בעזרת טורי חזקות סביב נקודה רגולרית

דוגמה ראשונה

נתבונן במד"ר $y'' + y = 0$.

כבר ראינו כי הפתרון הכללי שלה בכל קטע הוא $y = A \cos x + B \sin x$.

נשתמש בדוגמה זו כדי להבין את השיטה של פתרון בעזרת טורי חזקות.

נתעלם מכך שאנו מכירים את הפתרון הכללי ונחפש פתרון מהצורה

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

עם רדיוס התכנסות $R > 0$.

לפי משפט הגזירה איבר איבר של טורי חזקות,

$$0 = y'' + y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

נבצע **הזזת אינדקס** בטור הראשון ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n) x^n = 0$$

נקבל את נוסחת הנסיגה $a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$. במקרה זה ניתן לפתור אותה:

$$\begin{cases} a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} \\ a_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1} a_1}{(2n-1)!} \end{cases}$$

נעיר כי לצורך הדיוק יש להוכיח את הביטויים שניחשנו עבור a_{2n-1}, a_{2n} באינדוקציה בעזרת נוסחת הנסיגה. בכל אופן, קיבלנו:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a_1}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} x^{2n} = a_1 \cos x + a_0 \sin x$$

לכן שחזרנו את הפתרון הכללי הידוע.

בנוסף נעיר כי במקרה זה קיבלנו $R = \infty$.

הערה: הזאת אינדקס הוא שוויון בסגנון

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0-k}^{\infty} a_{n+k}$$

השיטה של פתרון בעזרת טורי חזקות

באופן כללי, עבור המד"ר

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (4)$$

השיטה עובדת כדלקמן.

1. מפתחים את $p(x), q(x), r(x)$ לטורי חזקות סביב הנקודה $x = x_0$.

2. מציעים פתרון מהצורה $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

3. מציבים את כל הפיתוחים לתוך המד"ר (4), מאגדים הכל תחת סכום אחד, ומשווים את כל המקדמים.

על מנת שהשיטה תעבוד באופן שתואר, נזדקק לתנאי הבא.

הגדרה: נקודה רגולרית של המד"ר (4) היא נקודה שסביבה הפונקציות $p(x), q(x), r(x)$ ניתנות לפיתוח לטורי חזקות בעלי רדיוסי התכנסות חיוביים.

מתברר שבמקרה כזה, אכן קיים פתרון שניתן לפיתוח לטור חזקות.

משפט 4: נניח כי $p(x), q(x), r(x)$ ניתנים לפיתוח לטורי חזקות סביב x_0 עם רדיוסי התכנסות R_1, R_2, R_3 בהתאמה. אז לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד $y(x)$, והוא ניתן לפיתוח לטור חזקות סביב x_0 עם רדיוס התכנסות אשר מקיים

$$R \geq \min \{R_1, R_2, R_3\}$$

לא נוכיח את המשפט, אבל הוא יהווה רקע של ביטחון שאכן ניתן לפתור בעיות שונות באמצעות טורי חזקות.

הערה: כדי לבדוק אם נקודה היא רגולרית, יש למצוא צורה מנורמלת (4). מצד שני, כדי לפתור, אין בעיה להציב $y(x)$ לתוך מד"ר לא מנורמלת אם זה יותר נוח.

נראה בקרוב שחשוב לוודא שהנקודה שעובדים סביבה היא רגולרית, כך שלא מומלץ לוותר על הבדיקה הזו.

משוואת הרמיט ופולינומי הרמיט

משוואת הרמיט היא המד"ר

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (5)$$

כאשר $\lambda \in \mathbb{R}$ פרמטר. נפתור בעזרת טורי חזקות סביב הנקודה הרגולרית $x_0 = 0$.

נציב $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 2a_2 + \lambda a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)(n+2) a_{n+2} + (\lambda - 2n) a_n) x^n \end{aligned}$$

לכן

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

אפשר לקבוע שני פתרונות בלתי תלויים באופן הבא. עבור הראשון,

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1(x) = 1 - \frac{\lambda}{2} x^2 - \frac{\lambda(4-\lambda)}{24} x^4 - \dots$$

עבור השני,

$$\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y_2(x) = x + \frac{2-\lambda}{6} x^3 + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{120} x^5 + \dots$$

לפי בחירת תנאי ההתחלה, שני פתרונות אלה הם אכן בלתי תלויים:

$$W[y_1, y_2](0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

משפט 5: אם $\lambda \geq 0$ מספר זוגי אז קיים פתרון לא טריוויאלי של משוואת הרמיט (5) שהוא פולינום.

נשים לב כי בכל מקרה, הפתרון השני בהכרח אינו פולינום.

בעצם, הפתרונות שהם פולינומים הם אך ורק $Ay_1(x)$ כאשר m זוגי או $Ay_2(x)$ כאשר m אי זוגי.

דוגמאות:

1. עבור $\lambda = 0$, כלומר $m = 0$, נקבל את הפתרונות הפולינומיאליים A (קבועים).

2. עבור $\lambda = 2$, כלומר $m = 1$, נקבל את הפתרונות הפולינומיאליים Ax .

3. עבור $\lambda = 4$, כלומר $m = 2$, נקבל את הפתרונות הפולינומיאליים $A(1 - 2x^2)$.

4. עבור $\lambda = 6$, כלומר $m = 3$, נקבל את הפתרונות הפולינומיאליים $A(x - \frac{2}{3}x^3)$.

5. עבור $\lambda = 8$, כלומר $m = 4$, נקבל את הפתרונות הפולינומיאליים

$$A\left(1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4\right)$$

6. עבור $\lambda = 10$, כלומר $m = 5$, נקבל את הפתרונות הפולינומיאליים

$$A\left(x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5\right)$$

הגדרה: פולינום הרמיט מסדר m , אשר מסומן $H_m(x)$, הוא הפתרון הפולינומיאלי היחידה של משוואת הרמיט (5) עם $\lambda = 2m$ אשר המקדם המוביל שלו הוא 2^m .

דוגמה: נשתמש בדוגמאות הקודמות כדי לחשב כמה פולינומי הרמיט ראשוניים.

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_1(x) = 2x \\ H_2(x) = 4x^2 - 2 \\ H_3(x) = 8x^3 - 12x \\ H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{cases}$$

הערה: יש גרסה אחרת של פולינומי הרמיט אשר מוגדרת על ידי

$$\tilde{H}_m(x) = 2^{-\frac{m}{2}} H_m\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

שתי הגרסאות חשובות ושימושיות בשלל הקשרים. דרך מהירה לשחזר אותם:

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x^2}), \quad \tilde{H}_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-\frac{x^2}{2}})$$

משוואת לג'נדר ופולינומי לג'נדר

. משוואת לג'נדר מסדר k היא המד"ר

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \quad (7)$$

כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$ פרמטר.

על ידי חלוקה בביטוי $1 - x^2$ נקבל גרסה מנורמלת אשר מקדמיה ניתנים לפיתוח לטור חזקות סביב $x_0 = 0$ עם רדיוסי התכנסות $R = 1$.

נפתור בעזרת טורי חזקות סביב הנקודה הרגולרית $x_0 = 0$.

נציב $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ לתוך המד"ר (7) ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 2a_2 + \alpha(\alpha+1)a_0 + (6a_3 - 4a_2 + \alpha(\alpha+1)a_1)x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n + (\alpha(\alpha+1) - 2n)a_n)x^n \end{aligned}$$

לכן

$$a_{n+2} = \frac{(n-\alpha)(n+\alpha+1)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

אפשר לקבוע שני פתרונות בלתי תלויים באופן הבא. עבור הראשון,

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1(x) = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 + \dots$$

עבור השני,

$$\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y_2(x) = x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \dots$$

לפי בחירת תנאי ההתחלה, שני פתרונות אלה הם אכן בלתי תלויים:

$$W[y_1, y_2](0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

נשים לב כי אם $\alpha \geq 0$ שלם וזוגי אז $y_1(x)$ הוא פולינום, ואם $\alpha > 0$ אי זוגי אז $y_2(x)$ הוא פולינום.

בשני המקרים, רק כפולה בסקלר של פולינום זה הוא פתרון פולינומאלי.

הגדרה: פולינום לג'נדר מסדר n , אשר מסומן $P_n(x)$, הוא הפתרון היחיד של משוואת לג'נדר (7) במקרה $\alpha = n$ אשר מקיים $P_n(1) = 1$.

דוגמה: מתוך הפתרונות שמצאנו, לא קשה לחשב כמה פולינומי לג'נדר ראשוניים.

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

הערה: פולינומי לג'נדר מתקבלים מהפעלת תהליך גרהם שמידט על המערכת $\{1, x, x^2, \dots\}$ במרחב המכפלה הפנימית $V = C[-1, 1]$ עם המכפלה הפנימית הרגילה

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. טור חזקות, כולל רדיוס התכנסות וגזירה איבר איבר.

2. טורי טיילור מפורסמים: $e^x, \sin x, \cos x$.

3. התנאי: פונקציה ניתנת לפיתוח לטור חזקות.

4. הזזת אינדקס בטור.

“ I wish it need not have happened in my time, said Frodo.

So do I, said Gandalf, and so do all who live to see such times. But that is not for them to decide. All we have to decide is what to do with the time that is given us.

”

J.R.R. Tolkien, The Fellowship of the Ring