

שבוע 6: מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים, משוואת אוילר

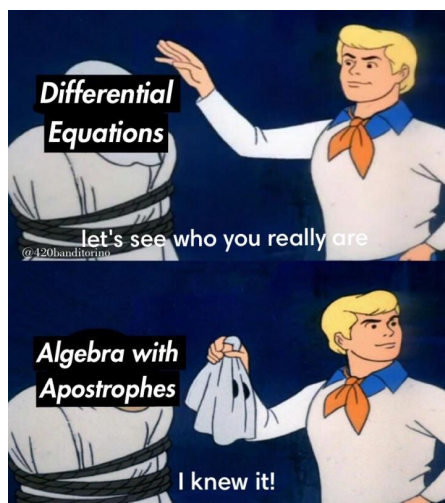
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	מד"ר לינארית מסדר גבוה עם מקדמים קבועים
2	1.1	פתרון מד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים
8	1.2	משוואת אוילר



תזכורות

אם r שורש של פולינום $p(r)$, אז הריבוי s מאופיין על ידי

$$p(r) = \dots = p^{(s-1)}(r) = 0, \quad p^{(s)}(r) \neq 0$$

מד"ר לינארית מנורמלת מסדר n :

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \quad (1)$$

משפט 1: נניח כי $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$ רציפות בקטע I . אז אוסף הפתרונות של המד"ר (1) עם $q(x) \equiv 0$ (כלומר, הומוגנית) אשר מוגדרים ב- I מהווה תת מרחב וקטורי של $C^n(I)$ בעל מימד n .

1 | מד"ר לינארית מסדר גבוה עם מקדמים קבועים

1.1 פתרון מד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

סימונים, תיאור אופן הפתרון והפולינום האופייני

בניגוד למד"ר לינארית כללית מסדר n , אנחנו נראה שניתן לפתור מד"ר לינאריות רבות בתנאי שמקדמיה קבועים: $a_0(x), \dots, a_n(x)$ הם מספרים. הצורה הכללית של מד"ר לינארית הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים היא

$$L[y] := a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2)$$

כאשר $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ו- $a_n \neq 0$.

דוגמאות:

1. המד"ר $2y'' - 3y' + 4y = 0$ היא מד"ר עם מקדמים קבועים.

2. המד"ר $2y'' - 3xy' + 4y = 0$ אינה מד"ר עם מקדמים קבועים.

מתברר שהפונקציות e^{rx} הן פונקציות חשובות בפתרון של מד"ר כזו. זה לא אומר שלא יתכנו פתרונות אחרים, כפי שמיד נראה. זה אומר שנקודת הפתיחה תהיה חיפוש של פתרון מהצורה e^{rx} .

מה מיוחד בפונקציות אלו? נציב e^{rx} למד"ר, כאשר r ייקבע כך שאכן מדובר בפתרון (אם ניתן):

$$0 = a_n r^n e^{rx} + \dots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = (a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0) e^{rx}$$

התנאי הוא לכן $p(r) := a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$. כלומר, r צריך להיות שורש של $p(r)$.

הגדרה 2. תהי $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 = 0$ מד"ר לינארית הומוגנית בעלת מקדמים קבועים. הפולינום

$$p(r) = a_n r^n + \dots + a_0$$

מכונה **הפולינום האופייני של המד"ר**.

בחישוב הקצר למעלה, הוכחנו למעשה את המשפט הבא.

משפט 3: לכל $r \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$L[e^{rx}] = p(r) e^{rx} \quad (3)$$

בפרט, הפונקציה e^{rx} היא פתרון של המד"ר ההומוגנית (2) אם ורק אם r הוא שורש של הפולינום האופייני.

כלומר, e^{rx} היא וקטור עצמי של L עם ערך עצמי $p(r)$.

דוגמאות עם שורשים ממשיים פשוטים

1. נתונה המד"ר $y'' - y = 0$. הפולינום האופייני שלה הוא $r^2 - 1$, ששורשיו הם ± 1 . נקבל שני פתרונות של המד"ר: e^x ו- e^{-x} . הם בלתי תלויים בכל קטע כי

$$W[e^x, e^{-x}] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

ידוע שמרחב הפתרונות הוא בעל מימד 2 ומצאנו שני פתרונות בלתי תלויים. לכן הם מהווים קבוצה פורשת והפתרון הכללי הוא $y = Ae^x + Be^{-x}$.

2. נתונה המד"ר $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. הפולינום האופייני שלה הוא $p(r) = r^3 - 6r^2 + 11r - 6$. ננסה לנחש שורשים בעזרת ניחוש אינטליגנטי: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. בהצבה רואים מיד שמתקיים $p(1) = 0$, $p(2) = 0$ ו- $p(3) = 0$.

מצאנו שלושה שורשים 1, 2, 3 של פולינום ממעלה 3 ולכן הם היחידים, ונקבל שלושה פתרונות בלתי תלויים (בדקו! וזה גם ינבע מהתורה הכללית בקרוב) של המד"ר e^x, e^{2x}, e^{3x} . מימד מרחב הפתרונות הוא 3 ולכן בסך הכל הפתרון הכללי הוא

$$y = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x}$$

שורש ממשי עם ריבוי

אם המד"ר למשל מסדר 2 ולפולינום האופייני יש שני שורשים שונים, ראינו שלכל שורש מתאים פתרון מהצורה e^{rx} . מה אם השורשים שווים?

דוגמה: נתונה המד"ר $y'' - 2y' + y = 0$. הפולינום האופייני הוא $p(r) = r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2$. לכן יש לו שורש אחד $r = 1$ עם ריבוי 2.

יש לנו אם כך פתרון אחד של המד"ר, e^x . נמצא פתרון נוסף באמצעות הורדת סדר: נציב $y = ve^x$ ונקבל

$$0 = v''e^x + 2v'e^x + ve^x - 2(v'e^x + ve^x) + ve^x = e^x v''$$

לכן קיבלנו $v'' = 0$, כלומר $v = Ax + B$. לכן $y = ve^x = (Ax + B)e^x = Axe^x + Be^x$. כלומר, קיבלנו פתרון נוסף xe^x .

מה אם הריבוי היה 3? היינו מקבלים פתרון שלישי עבור $r = 1$: x^2e^x . בסך הכל היו שלושה פתרונות, e^x, xe^x, x^2e^x .

משפט 4. יהי $r \in \mathbb{R}$ ויהי k מספר שלם ואי שלילי.

1. הפונקציות $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^k e^{rx}$ בלתי תלויות לינארית בכל קטע.

2. הפונקציה $x^k e^{rx}$ היא פתרון של המד"ר ההומוגנית עם מקדמים קבועים (2) אם ורק אם r שורש של

הפולינום האופייני של המד"ר עם ריבוי לפחות $k + 1$.

בפרט, אם r הוא שורש מריבוי $s \geq 1$ אז $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{s-1}e^{rx}$ פתרונות בלתי תלויים של המד"ר.

רעיון ההוכחה:

1. זהו תרגיל באלגברה לינארית.

2. נדגים ראשית עבור $k = 1$.נגזור את השוויון (3) לפי המשתנה r , ונקבל לפי משפט שוורץ (סדר הגזירה אינה משנה) כי

$$p'(r) e^{rx} + xp(r) e^{rx} = \frac{\partial}{\partial r} (L[e^{rx}]) = L \left[\frac{\partial}{\partial r} (e^{rx}) \right] = L[xe^{rx}]$$

כלומר,

$$L[xe^{rx}] = p'(r) e^{rx} + xp(r) e^{rx}$$

לכן, אם r_0 שורש מריבוי 2 לפחות, אז $p(r_0) = p'(r_0) = 0$ ולכן $L[xe^{r_0x}] = 0$ בכיוון ההפוך, אם $L[xe^{r_0x}] = 0$ אז

$$p'(r_0) e^{r_0x} + xp(r_0) e^{r_0x} = 0$$

בקטע שלם. לכן לפי סעיף 1, המקדמים כולם מתאפסים: $p(r_0) = p'(r_0) = 0$ לכן r_0 הוא שורש של $p(r)$ עם ריבוי לפחות 2.

דוגמה: נתונה המד"ר $y''' - 3y' + 2y = 0$. הפולינום האופייני שלה הוא $p(r) = r^3 - 3r + 2$.

ניחוש אינטליגנטי נותן שני שורשים: $-2, 1$. בנוסף, $p'(1) = 0$ ולכן ל-1 יש ריבוי 2. בסך הכל נקבל פתרון כללי

$$y = Ae^x + Bxe^x + Ce^{-2x}$$

נעיר שיש כאן פער שנסגור מיד, לגבי כך ש- e^x, xe^x, e^{-2x} בלתי תלויות לינארית.

שורש שאינו ממשי

הגדרה: עבור $a, b \in \mathbb{R}$ נגדיר $e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$.

הרעיון מאחורי הגדרה זו הוא $e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$, ובנוסף הפונקציה

$$\text{cis}(b) = \cos b + i \sin b$$

בעלת תכונות אשר מזכירות פונקציה מעריכית כך שהגיוי לפרש אותה בתור e^{ib} .

חשוב להזהר עם הביטוי e^{ib} . בעוד שהוא כאמור מפגין תכונות אשר מתאימות לסימון שלו כביטוי מעריכי, יש לו גם "קריזות" מוזרות שצריך להתרגל אליהן. למשל,

$$|e^{ib}| = \sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$$

בנושא אחר, נזכיר כי אם r שורש של פולינום עם מקדמים ממשיים אז גם $\bar{r}$ שורש, ומאותו ריבוי.

דוגמה: עבור הפולינום $x^2 + 1$ מתקיים כמובן כי i שורש. ואכן, גם $\bar{i} = -i$ שורש.

לכן אם $a + ib$ שורש מריבוי k של $p(r)$ אז $a - ib$ שורש מריבוי k כי $p(r)$ הוא פולינום בעל מקדמים ממשיים. ניתן לחשוב אולי שזה לא מוביל לפתרונות היות שאנחנו מחפשים פונקציות ממשיות, אבל השוויון הבא יסייע לנו להפיק פתרונות בכל זאת:

$$e^{(a \pm ib)x} = e^{ax} (\cos(bx) \pm i \sin(bx))$$

אם נתייחס ל- i כסקלר ונציב למד"ר, שני אלו יהיו פתרונות. לכן לפי עיקרון הסופרפוזיציה, גם

$$\begin{cases} e^{ax} \cos(bx) = \frac{e^{(a+ib)x} + e^{(a-ib)x}}{2} \\ e^{ax} \sin(bx) = \frac{e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x}}{2i} \end{cases}$$

קיבלנו אם כך שני פתרונות אשר מתאימים לשני השורשים הצמודים $a \pm ib$.

משפט 5: נניח כי $a, b \in \mathbb{R}$ וכן $b \neq 0$. התנאים הבאים שקולים.

1. $r = a + ib$ שורש של הפולינום האופייני של המד"ר (2).

2. $e^{ax} \cos(bx)$ פתרון של המד"ר (2).

3. $e^{ax} \sin(bx)$ פתרון של המד"ר (2).

בנוסף, אם $r = a + ib$ הוא אכן שורש של הפולינום האופייני, אז $e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx)$ הם פתרונות בלתי תלויים לינארית של המד"ר (2).

דוגמה: נתונה המד"ר $y'' + y = 0$. הפולינום האופייני הוא $p(r) = r^2 + 1$, ושורשיו הם $\pm i$. נקבל לכן שני פתרונות $\cos x, \sin x$ שקל לבדוק שהם בלתי תלויים, ובסך הכל נגיע לפתרון כללי

$$y = A \cos x + B \sin x$$

שורש שאינו ממשי עם ריבוי

למעשה, משפט 4 נכון ומוכח באותו אופן גם עבור $r \in \mathbb{C}$. היות שמתקיים

$$x^k e^{(a+ib)x} = x^k e^{ax} \cos(bx) + ix^k e^{ax} \sin(bx)$$

נקבל באופן דומה לדיון הקודם את המשפט הבא.

משפט 6: נניח כי $a, b \in \mathbb{R}$ וכן $b \neq 0$, ויהי k מספר שלם ואי שלילי. התנאים הבאים שקולים.

1. $r = a + ib$ שורש של הפולינום האופייני של המד"ר (2) מריבוי $k + 1$ לפחות.

2. $x^k e^{ax} \cos(bx)$ פתרון של המד"ר (2).

3. $x^k e^{ax} \sin(bx)$ פתרון של המד"ר (2).

בנוסף, אם $r = a + ib$ הוא שורש מריבוי s של הפולינום האופייני, אז

$$e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx), \dots, x^{s-1} e^{ax} \cos(bx), x^{s-1} e^{ax} \sin(bx)$$

הם פתרונות בלתי תלויים לינארית של המד"ר (2).

כלומר, מתקבלים $2s$ פתרונות בלתי תלויים אשר משוייכים לשורשים $r = a \pm ib$. נשים לב שסכום הריבויים של שני שורשים אלה הוא אותו מספר, $2s$.

סיכום של פתרון כללי עבור מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים

המשפט הבא מאפשר לחבר את הפתרונות שראינו עד כה, לקבלת פתרון כללי.

משפט 7: נניח כי $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{C}$ שונים, ונניח כי $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{N}$. נגדיר

$$V_j = \text{span} \{e^{r_j x}, x e^{r_j x}, \dots, x^{s_j-1} e^{r_j x}\}, \quad j = 1, \dots, k$$

אז לכל בחירה של k פונקציות: $y_1 \in V_1, \dots, y_k \in V_k$ שאף אחת מהן אינה פונקצית האפס, מתקיים כי $y_1, \dots, y_k$ בלתי תלויות לינארית בכל קטע.

במילים אחרות, המשפט אומר שהסכום $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ הוא סכום ישר.

לכן בחירה של בסיס בכל אחד מהמרחבים $V_1, \dots, V_k$ תיתן בסך הכל בסיס של סכום ישר זה.

מסקנה: אם מצרפים את כל הפתרונות הבת"ל שתוארו אשר מתאימים לכל שורש של הפולינום האופייני, מקבלים בסיס של מרחב הפתרונות.

רעיון ההוכחה: לפי משפט 1, מימד מרחב הפתרונות של המד"ר הוא n .

לכן n פתרונות בלתי תלויים מהווים בסיס.

אם נספור את הפתרונות שמתקבלים מצירוף כל הפתרונות שתוארו, נקבל כרצוי n פתרונות בלתי תלויים לינארית.

דוגמאות:

1. נתונה המד"ר $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 2y^{(3)} - 12y'' + y' - 6y = 0$. הפולינום האופייני שלה הוא $p(r) = r^5 - 6r^4 + 2r^3 - 12r^2 + r - 6$.

לפי ניחוש אינטליגנטי, השורשים הרציונליים היחידים שייתכנו הם $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. נציב אותם ונקבל כי 6 הוא שורש, ולא האחרים. בנוסף, $p'(6) \neq 0$ ולכן מדובר בשורש פשוט (בעל ריבוי 1).

נבצע חלוקת פולינומים של $p(r) = r^5 - 6r^4 + 2r^3 - 12r^2 + r - 6$ ב- $r - 6$ ונקבל

$$p(r) = (r - 6)(r^4 + 2r^2 + 1) = (r - 6)(r^2 + 1)^2$$

כלומר, השורשים הם בסך הכל 6 מריבוי 1 ו- $\pm i$ מריבוי 2 כל אחד. לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = Ae^{6x} + B \cos x + C \sin x + Dx \cos x + Ex \sin x$$

2. נתונה המד"ר $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 3y'' - 2y' + 2y = 0$, כאשר נרמז כי $\sin x$ פתרון. הפולינום האופייני שלה הוא $p(r) = r^4 - 2r^3 + 3r^2 - 2r + 2$.

יש לנו פתרון $\sin x$ ולכן $r = i$ הוא שורש של הפולינום האופייני. לכן גם $r = -i$ הוא שורש של הפולינום האופייני ובסך הכל הפולינום האופייני צריך להתחלק בפולינום $(r+i)(r-i) = r^2 + 1$. נבצע חלוקת פולינומים ונקבל

$$p(r) = (r^2 + 1)(r^2 - 2r + 2) = (r^2 + 1)(r - (1+i))(r - (1-i))$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = A \cos x + B \sin x + Ce^x \cos x + De^x \sin x$$

1.2 משוואת אוילר

המשוואה של אוילר

הגדרה: משוואת אוילר הומוגנית מסדר n היא מד"ר מהצורה

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

כאשר $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (קבועים).

משוואת אוילר היא מד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים לא קבועים אבל בעלי צורה מסוימת מאוד. הייצוג הנ"ל שלה מכונה צורה **קנונית** של משוואת אוילר. הצורה המנורמלת היא

$$y^{(n)} + \frac{b_{n-1}}{x} y^{(n-1)} + \dots + \frac{b_0}{x^n} y = 0$$

הערה: נשים לב שבקטעים שמכילים את 0, מקדמי המד"ר המנורמלת אינם רציפים ולכן תנאי משפט הקיום והיחידות לא מתקיימים.

דוגמאות:

1. המד"ר $x^3 y''' - 4xy' + y = 0$ היא משוואת אוילר בצורה קנונית. צורתה המנורמלת היא $y''' - \frac{4}{x^2} y' + \frac{1}{x^3} y = 0$.

2. המד"ר $y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$ היא משוואת אוילר בצורה מנורמלת. בצורה קנונית, $x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0$.

3. המד"ר $x^2 y''' - xy'' = 0$ היא משוואת אוילר שאינה מוצגת בצורה קנונית או מנורמלת. בצורה קנונית, $x^3 y''' - x^2 y'' = 0$.
4. המד"ר $xy'' + 2x^2 y' - x^3 y = 0$ אינה משוואת אוילר. החזקה צריכה להיות תואמת לסדר הגזירה (באיזשהו ייצוג).

פתרון על ידי שינוי משתנה

בקרן $(0, \infty)$ ניתן להעביר כל משוואת אוילר למד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים בעזרת שינוי המשתנה $x = e^t$ (או במילים אחרות $t = \ln x$).

נסמן $Y(t) = y(e^t)$. נציין גם את הקשר ההפוך $y(x) = Y(\ln x)$.

הערה: עבור התחום $x < 0$ אפשר להציב $x = -e^t$. במקרה זה $t = \ln(-x) = \ln|x|$.

דוגמאות:

1. נתונה המד"ר $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ בתחום $x > 0$. נגדיר פונקציה חדשה $Y(t) = y(e^t)$, ובאופן שקול $y(x) = Y(\ln x)$. נקבל

$$\begin{cases} y'(x) = Y'(\ln x) \frac{1}{x}, \\ y''(x) = Y''(\ln x) \frac{1}{x^2} - Y'(\ln x) \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

לכן המד"ר היא

$$0 = x^2 \frac{Y'' - Y'}{x^2} + x \frac{Y'}{x} - 4Y = Y'' - 4Y$$

הפולינום האופייני של מד"ר זה הוא $r^2 - 4$ ששורשיו ± 2 , ולכן

$$Y(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} \Rightarrow y(x) = Ae^{2\ln x} + Be^{-2\ln x} = Ax^2 + \frac{B}{x^2}$$

2. נתונה המד"ר $x^2 y'' + xy' + y = 0$ בתחום $x > 0$. כמו קודם נקבל

$$0 = Y'' - Y' + Y' + Y = Y'' + Y$$

הפולינום האופייני שלה הוא $r^2 + 1$ ששורשיו $\pm i$ ולכן

$$Y = A \cos t + B \sin t \Rightarrow y = A \cos(\ln x) + B \sin(\ln x)$$

3. נתונה המד"ר $x^2 y'' + 2xy' + y = 0$ בתחום $x > 0$. כמו קודם נקבל

$$0 = Y'' - Y' + 2Y' + Y = Y'' + Y' + Y$$

ראינו כבר את הפתרון הכללי של מד"ר זה:

$$Y = Ae^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + Be^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$$

לכן

$$y = \frac{A}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2}\right) + \frac{B}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2}\right)$$

הפולינום האופייני שמתקבל לאחר המעבר למשתנה t מכונה הפולינום האופייני של משוואת אוילר הנתונה. נגדיר אותו במדויק מיד, באופן קצת אחר. נסכם את מה שראינו עד כה.

1. מבצעים הצבה $x = e^t$, כלומר $t = \ln x$. מתקבלת מד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים.
2. מוצאים פולינום אופייני ואת שורשיו.
3. כותבים פתרון כללי עבור המד"ר שהתקבלה במשתנה t .
4. חוזרים למשתנה x .

פתרון בעזרת פתרונות יסודיים

עבור מד"ר עם מקדמים קבועים, הפונקציות e^{rt} הן וקטורים עצמיים של האופרטור הדיפרנציאלי של המד"ר.

במקרה של משוואת אוילר התרגום למקדמים קבועים הוא $t = \ln x$, ומקבלים וקטורים עצמיים x^r , כאשר הכללים דומים למקרה של מקדמים קבועים.

כלומר, ניתן לדלג על שינוי המשתנה $x = e^t$ ופשוט להציב x^r לתוך המד"ר $a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$. זה יפיק את הפולינום האופייני, כפי שמנוסח במשפט הבא.

משפט 8: $L[y] := a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$ תהי משוואת אוילר.

אז המד"ר המתקבל עבור $Y(t) = y(e^t)$ היא מד"ר עם מקדמים קבועים שהפולינום האופייני שלה $p(r)$ מקיים

$$L[x^r] = p(r) \cdot x^r, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

המשפט מתקבל על ידי חשבון ישיר.

נשים לב כי

$$L[x^r] = a_n x^n r(r-1) \dots (r-n+1) x^{r-n} + \dots + a_2 x^2 r(r-1) x^{r-2} + a_1 x r x^{r-1} + a_0 x^r$$

לכן נקבל את ההגדרה הבאה.

הגדרה: $a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$ תהי משוואת אוילר. הפולינום האופייני שלה הוא הפולינום

$$p(r) = a_n r(r-1) \dots (r-n+1) + \dots + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0$$

לאחר מציאת השורשים (כולל ריבויים) ניתן לכתוב את הפתרון הכללי כאשר כל שורש תורם מספר מחוברים לפי המקרים האפשריים השונים. נסכם את כל המקרים הללו בטבלה.

סוג השורש	מקדמים קבועים	אויילר
r ממשי מריבוי s	$e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{s-1}e^{rx}$	$x^r, (\ln x)x^r, \dots, (\ln x)^{s-1}x^r$
$r = a + ib$ מריבוי s	$e^{ax} \cos(bx), \dots, x^{s-1}e^{ax} \cos(bx),$ $e^{ax} \sin(bx), \dots, x^{s-1}e^{ax} \sin(bx)$	$x^a \cos(b \ln x), \dots, (\ln x)^{s-1} x^a \cos(b \ln x),$ $x^a \sin(b \ln x), \dots, (\ln x)^{s-1} x^a \sin(b \ln x)$
וכן $b \neq 0$		

הערה: בתחום $x < 0$, הטבלה דומה אבל עם $-x = |x|$ במקום x בכל מקום.

דוגמאות:

1. נתונה $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$. זו משוואת אוילר. נציב $y = x^r$ כדי להפיק את הפולינום האופייני:

$$0 = x^2 r(r-1)x^{r-2} + xrx^{r-1} - 4x^r = x^r(r^2 - r + r - 4)$$

לכן $p(r) = r^2 - 4$ ושורשיו ± 2 עם ריבוי 1. לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = Ax^2 + \frac{B}{x^2}$$

לא התייחסנו לתחום, אבל קיבלנו במקרה פתרון המוגדר לכל $x \neq 0$. בנוסף, יש פתרון שמוגדר לכל x : $y(x) = Ax^2$.

2. $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$ בתחום $x > 0$. זו משוואת אוילר. נציב $y = x^r$ כדי להפיק את הפולינום האופייני:

$$0 = x^2 r(r-1)x^{r-2} + xrx^{r-1} + 4x^r = x^r(r^2 - r + r + 4)$$

לכן $p(r) = r^2 + 4$ ושורשיו $\pm 2i$ עם ריבוי 1. לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = A \cos(2 \ln x) + B \sin(2 \ln x)$$

לסיכום, ניתן לדלג על ההצבה $x = e^t$ ופשוט להציב x^r למד"ר.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
1. יציבות ויציבות אסימפטוטית של מד"ר מסדר 1.

“ Roads? Where we’re going, we don’t need roads.

”

Dr. Emmett Brown, Back to the Future