

שבוע 5: הוורונסקיאן, הורדת סדר, וריאציה של פרמטרים

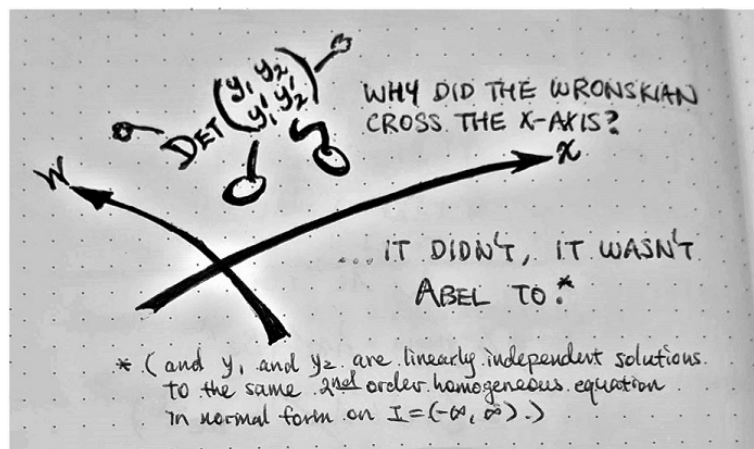
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר n (המשך)
2	1.1	הוורונסקיאן
6	1.2	השיטה של הורדת סדר
9	1.3	השיטה של וריאציה של פרמטרים



תזכורות

צורה מנורמלת כללית של מד"ר לינארית מסדר n :

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \quad (1)$$

משפט 1: נניח כי $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$ רציפות בקטע I . אז אוסף הפתרונות של המד"ר (1) עם $q(x) \equiv 0$ (כלומר, הומוגנית) אשר מוגדרים ב- I מהווה תת מרחב וקטורי של $C^n(I)$ בעל מימד n .

1 | משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר n (המשך)

1.1 הוורונסקיאן

הגדרה ותנאי מספיק לאי תלות לינארית

נניח שנתונות n פונקציות $y_1, \dots, y_n$ אשר גזירות $n-1$ פעמים בקטע I . ראינו דוגמה מעניינת בהוכחת המשפט הקודם, שם הפונקציות הונדסו להיות בלתי תלויות לינארית על ידי כך שהוקטורים

$$\left(y_i(x_0), y_i'(x_0), \dots, y_i^{(n-1)}(x_0) \right), \quad i = 1, \dots, n$$

היו וקטורי היחידה ב- $\mathbb{R}^n$. בעצם, הווקטורים הללו רק צריכים להיות בלתי תלויים לינארית בעצמם כדי שהפונקציות $y_1, \dots, y_n$ יהיו בלתי תלויות לינארית. נבין מדוע זה כך כעת.

נניח שהפונקציות $y_1, \dots, y_n$ הן תלויות לינארית ב- I , כלומר, קיימים סקלרים שאינם כולם 0 כך ש-

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \quad \forall x \in I$$

נגזור את השוויון הזה i פעמים ונציב $x = x_0$, ונעשה זאת לכל $i = 0, \dots, n-1$. נקבל n משוואות:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ניתן לכתוב את המערכת הזו בכתוב מטריוני:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

מכיוון ש- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ לא כולם 0, מתחייב שהדטרמיננט של המטריצה מתאפס.

הגדרה 2. נניח כי $y_1, \dots, y_n$ פונקציות אשר גזירות $n-1$ פעמים בנקודה x_0 . הוורונסקיאן של $y_1, \dots, y_n$ בנקודה x_0 מוגדר על ידי

$$W[y_1, \dots, y_n](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \quad (2)$$

דוגמאות:

1. נחשב

$$W[x, e^x] = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x = (x-1)e^x$$

2. נחשב

$$W[1, \sin^2 x, \cos^2 x] = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin(2x) & -\sin(2x) \\ 0 & 2\cos(2x) & -2\cos(2x) \end{vmatrix} = 0$$

ורונסקיאן שונה מאפס גורר אי תלות לינארית

כפי שראינו, אם $y_1, \dots, y_n$ תלויות לינארית ב- I , אז הוורונסקיאן מתאפס לכל $x_0 \in I$. במילים אחרות:

משפט 3. נניח כי $y_1, \dots, y_n$ פונקציות אשר מוגדרות בקטע I וגזירות $n-1$ פעמים בנקודה $x_0 \in I$. אם $W[y_1, \dots, y_n](x_0) \neq 0$ או $y_1, \dots, y_n$ בלתי תלויות לינארית ב- I .

שאלה מתבקשת היא אם התנאי שראינו הנו אם ורק אם. ליתר דיוק, האם נכון לומר שכאשר הוורונסקיאן מתאפס, הפונקציות תלויות לינארית?

דוגמאות:

1. $\cos x, \sin x$ בלתי תלויות לינארית בכל קטע אשר מכיל את $x_0 = 0$ כי

$$W[\cos x, \sin x](0) = \begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ -\sin 0 & \cos 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

בדקו שזה בעצם נכון בכל קטע.

2. שתי הפונקציות $y(x) = x$ ו- $y_2(x) = x^2$ הן בוודאי בלתי תלויות לינארית בכל קטע. אבל

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$$

לכן הוורונסקיאן מתאפס בנקודה $x = 0$. זאת למרות שכאמור, הן בלתי תלויות לינארית, למשל בכל קטע שמכיל את $x = 1$ כי

$$W[x, x^2](1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

כביכול החישובים בשתי הנקודות $x = 0, 1$ הובילו לתשובות סותרות. אבל לא, כי המשפט אינו אם ורק אם.

3. שתי הפונקציות $y_1(x) = x^2$ ו-

$$y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

הן גזירות ברציפות בכל $\mathbb{R}$ ומקיימות

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} x^2 & \pm x^2 \\ 2x & \pm 2x \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

בכל זאת, הן בלתי תלויות לינארית ב- $\mathbb{R}$: כדי שיתקיים $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^2 = 0$ לכל $x > 0$ צריך שיתקיים $\alpha_2 = -\alpha_1$, וכדי שיתקיים $\alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^2 = 0$ לכל $x < 0$ צריך שיתקיים $\alpha_1 = \alpha_2$. לכן בהכרח $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

תנאי מספיק לתלות לינארית במקרה של פתרונות של מד"ר לינארית

בשני המקרים, התאפסות הוורונסקיאן נותנת $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ שתלויים בנקודה. אם כך נראה שהמצב אבוד. אבל:

משפט 4. נניח כי $y_1, \dots, y_n$ הם פתרונות ב- I של המד"ר

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = 0$$

כאשר $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$ רציפות ב- I .
אם קיימת $x_0 \in I$ כך ש- $W[y_1, \dots, y_n](x_0) = 0$, אז $y_1, \dots, y_n$ תלויות לינארית ב- I .

מסקנה לגבי פתרונות של מד"ר

משני המשפטים הקודמים, ניתן לסכם לגבי פתרונות של מד"ר:

מסקנה: נניח כי $y_1, \dots, y_n$ הם פתרונות ב- I של המד"ר

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = 0$$

כאשר $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$ רציפות ב- I . אז התנאים הבאים שקולים:

1. $y_1, \dots, y_n$ בלתי תלויות לינארית ב- I .

2. $W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0$ לכל $x \in I$.

3. קיים $x_0 \in I$ עבורו $W[y_1, \dots, y_n](x_0) \neq 0$.

ניתן גם לנסח מחדש, וכדאי. התנאים הבאים גם הם שקולים (אחד לשני, לא לקודמים):

א. $y_1, \dots, y_n$ תלויות לינארית ב- I .

ב. $W[y_1, \dots, y_n](x) \equiv 0$ לכל $x \in I$.

ג. קיים $x_0 \in I$ עבורו $W[y_1, \dots, y_n](x_0) = 0$.

שימושים בורונסקיאן

בזכות הקשר של הורונסקיאן לאי תלות, ולתלות במקרה שנתונים פתרונות של מד"ר שמקיימת את הנחות משפט הקיום והיחידות, ניתן להשתמש בו לדברים נוספים מלבד בדיקה פשוטה של תלות ואי תלות. נראה שתי דוגמאות.

דוגמאות:

1. נתונות שתי פונקציות $y_1(x) = \cos x$ ו- $y_2(x) = \sin x$. נמצא מד"ר לינארית הומוגנית מנורמלת מסדר 2 שהן פתרונות שלה.

הרעיון הוא פשוט: ניקח פונקציה כללית $y(x)$ אשר גזירה פעמיים ברציפות ונתבונן בשוויון

$$W[y, y_1, y_2] = 0$$

אם חושבים על y כפונקציה נעלמת אז מדובר במד"ר שתהיה ככל הנראה מסדר 2, ואשר y_1 פותרת כי y_1, y_2, y_2 כמובן תלויות לינארית ולכן $W[y_1, y_1, y_2] = 0$. באותו אופן, גם y_2 פתרון.

יתכנו תקלות שנפרט מיד בשיטה זו אבל בדוגמה הזו זה עובד:

$$0 = W[y, y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{vmatrix} = y'' + y$$

קיבלנו את המד"ר $y'' + y = 0$ שאכן עומדת בתנאים.

תקלות אפשריות: המקדם של y'' (מהו באופן כללי?) עלול שלא להיות 1 (אבל אז ניתן לחלק בו); הוא יכול להתאפס, ואולי אפילו באופן זהותי.

2. נראה שאין אף מד"ר מסדר 2 שעומדת בתנאי משפט הקיום והיחידות כך שהפונקציה $y_1(x) = x^2$ פותרת בסביבת $x = 0$.

ואכן, אם הייתה כזו מד"ר, אז היה ניתן להשלים את y_1 לבסיס של מרחב הפתרונות: y_1, y_2 . אבל אז

$$0 \neq W[y_1, y_2](0) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_2(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = 0$$

זו סתירה.

נוסחת אבל

המשפט הבא מדייק את המסקנה הקודמת. הוא מכונה **נוסחת אבל** (Niels Henrik Abel, 1802 - 1829):

משפט 5: נניח כי $y_1, \dots, y_n$ הם פתרונות ב- I של המד"ר

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = 0$$

כאשר $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$ רציפות ב- I . אז לכל $x_0, x \in I$ מתקיים

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = W[y_1, \dots, y_n](x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_{n-1}(t) dt}$$

דוגמה: נניח שנתונה המד"ר $y''' - 2xy'' + x^2y' + y = 0$ ניקח $x_0 = 0$.

אז לכל שני פתרונות y_1, y_2 :

$$W(x) = W(0) e^{-\int_0^x -2tdt} = W(0) e^{x^2}$$

1.2 השיטה של הורדת סדר

שימוש בפתרון ידוע להורדת סדר המד"ר

באופן כללי, פתירת מד"ר לינארית היא משימה קשה. בכל זאת, אם במקרה ידוע לנו פתרון אחד של המד"ר ההומוגנית, אז ניתן להקל את המשימה, ואף לעיתים להשלים אותה. נראה כיצד דרך שתי דוגמאות.

דוגמאות:

1. נתונה המד"ר $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$. אם ציפור קטנה לוחשת לכם שהפונקציה $y_1(x) = e^x$ עלולה לסייע בפתרון המד"ר, מה ניתן לעשות?

הפונקציה הנתונה היא פתרון של המד"ר. השיטה של הורדת סדר עובדת תמיד באותו אופן: נחפש פתרון נוסף של המד"ר שהוא בעל צורה מיוחדת $y(x) = v(x)y_1(x)$. נציב ונקבל

$$0 = x(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + (1-2x)(v'y_1 + vy_1') + (x-1)vy_1$$

כאן כזכור $y_1 = e^x$ ולכן נקבל את התנאי

$$0 = x(e^xv'' + 2e^xv' + e^xv) + (1-2x)(e^xv' + e^xv) + (x-1)e^xv = xe^xv'' + e^xv'$$

למה זה עוזר? כי במד"ר שהתקבלה $xv'' + v' = 0$ **אין כלל את** v אלא רק את נגזרותיה. לכן אם נסמן $z = v'$ אז יש לנו בעצם מד"ר מסדר 1 עבור z :

$$xz' + z = 0 \Rightarrow (xz)' = 0 \Rightarrow xz = C \Rightarrow z = \frac{C}{x}$$

היות ש- $z = v'$ נקבל בעצם $v' = \frac{C}{x}$ ולכן $v = C \ln|x| + D$. לבסוף $y = ve^x$ ולכן

$$y = Ce^x \ln|x| + De^x$$

זהו פתרון כללי של המד"ר! בדקו שאכן שתי הפונקציות ליד C, D הן בלתי תלויות לינארית בכל קטע.

2. נתונה המד"ר $x^2 y'' + xy' - y = x^3$ ופתרון אחד של המד"ר ההומוגנית $y_1(x) = x$.

נחפש פתרון של המד"ר האי-הומוגנית שהוא בעל צורה $y(x) = v(x)y_1(x) = xv$. נציב ונקבל

$$x^3 = x^2(2v' + xv'') + x(v + xv') - xv = x^3v'' + 3x^2v'$$

קיבלנו $xv'' + 3v' = x$. נסמן $z = v'$ ונקבל

$$xz' + 3z = x \Rightarrow z' + \frac{3}{x}z = 1 \Rightarrow x^3z' + 3x^2z = x^3 \Rightarrow (x^3z)' = x^3$$

לכן $x^3z = \frac{1}{4}x^4 + C$ ולכן

$$v' = z = \frac{1}{4}x + \frac{C}{x^3} \Rightarrow v = \frac{1}{8}x^2 + \frac{C}{x^2} + D \Rightarrow y = xv = \frac{C}{x} + Dx + \frac{1}{8}x^3$$

באופן כללי, בהינתן מד"ר לינארית ופתרון $y_1(x)$ של המד"ר ההומוגנית, מציבים $y(x) = v(x)y_1(x)$ לתוך המד"ר המקורית ובכך יעלם v וישארו $v', v'', \dots, v^{(n-1)}$ בלבד.

זה קורה כי חישוב מראה שהמקדם של v הוא

$$L[y_1] = a_n(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y_1(x) \equiv 0$$

מסמנים $z = v'$ ומקבלים מד"ר לינארית מסדר אחד פחות, $n-1$.

אם המד"ר היא מסדר 2 וידוע פתרון אחד $y_1(x)$ אז ניתן בעזרת השיטה הנ"ל להוריד את הסדר ל-1 ומשם כבר ניתן לפתור.

אם המד"ר היא מסדר n אז פתרון אחד שלה מאפשר להוריד לסדר $n-1$, מה שמשאיר אותנו עם מד"ר שקשה לפתור. אבל אם נתונים פתרונות נוספים, ניתן להפעיל את השיטה שוב ושוב, בכל פעם עם הפתרון הידוע הבא, ובכך להוריד לאט לאט את הסדר של המד"ר.

דוגמה: אם נתונים פתרונות $y_1(x), y_2(x)$ אז $v_2 = \frac{y_2}{y_1}$ פותר את המד"ר של v (ההומוגנית) ולכן $z_2 = v_2'$ פותר את המד"ר של z .

נוסחה כללית לפתרון נוסף מתוך פתרון נתון עבור מד"ר מסדר 2

נתמקד כעת במד"ר הומוגנית מנורמלת מסדר 2:

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

נניח שנתון פתרון שלה $y_1(x)$ שאינו פתרון האפס. אפשר להפעיל את השיטה של הורדת בסימון כללי, ולהגיע למד"ר מסדר 1 שנוכל לפתור. בכך ניתן למצוא פתרון כללי של המד"ר הנתונה, בסימון כללי.

זה תרגיל טוב, אך במקום זאת נכתוב מיד את התוצאה ונוכיח אותה באופן אחר. היתרון בהוכחה האחרת הוא שהיא מהווה עוד דרך לשחזר בקצרה את נוסחת הפתרון הכללי.

משפט 6: נניח כי $y_1(x)$ פתרון של המד"ר $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ אשר אינו מתאפס בקטע I .

נניח בנוסף כי $p_1(x), p_0(x)$ רציפות בקטע I .

אז הפתרון הכללי של המד"ר בקטע I נתון על ידי

$$y(x) = Cy_1(x) \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1(x)^2} dx + Dy_1(x) \quad (4)$$

כאשר בכל אינטגרל, הכוונה היא לפונקציה קדומה אחת מסוימת של האינטגרנד.

הערה: אם $y_1(x)$ מתאפס במספר נקודות בקטע I , המשפט נכון בין כל שני אפסים עוקבים של $y_1(x)$. בנוסף, ניתן להוכיח שזה מאפשר לתפור פתרון כללי עבור המד"ר בקטע I כולו.

רעיון ההוכחה: יהי $y_2(x)$ פתרון אשר בלתי תלוי לינארית בפתרון הנתון $y_1(x)$. אז

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{W[y_1, y_2](x)}{y_1^2} = \frac{Ce^{-\int p_1(x) dx}}{y_1(x)^2}$$

לכן

$$\frac{y_2}{y_1} = C \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1(x)^2} dx + D$$

נכפול ב- $y_1(x)$ ונקבל את נוסחה (4).

הפתרון הנוסף שהתקבל הוא כפולה של y_1 בביטוי שקל לשכות. כדי להיזכר בו ניתן לבצע גזירה למנה שלהם: נבצע אינטגרציה ונכפול ב- y_1 ונשחזר מיד את הנוסחה הנ"ל.

טריקים לניחוש פתרון

שיטת הורדת הסדר מתבססת על הכרת פתרון אחד של מד"ר אשר אינה פתירה באופן פשוט. לעיתים ניתן לנחש פתרון אחד כזה. הנה שלושה טריקים שמאפשרים לנחש פתרונות עבור מד"ר לינארית והומוגנית:

1. אם סכום המקדמים הוא 0 אז $y_1(x) = e^x$ הוא פתרון.
2. אם סכום המקדמים בסימנים מתחלפים הוא 0 אז $y_1(x) = e^{-x}$ הוא פתרון.
3. אם y, y' מופיעים רק באופן $xy' - y$ אז $y_1(x) = x$ הוא פתרון.

דוגמאות:

1. במד"ר $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$, סכום המקדמים הוא 0. לכן $y_1(x) = e^x$ הוא פתרון.

2. המד"ר $x^2y'' + xy' - y = 0$ היא מהצורה עם $xy' - y$. לכן $y_1(x) = x$ הוא פתרון.

1.3 השיטה של וריאציה של פרמטרים

תזכורת לגבי צורת הפתרון של מד"ר לינארית אי הומוגנית ומבוא לשיטת הוריצייה של פרמטרים

נניח שנתונה מד"ר לינארית אי הומוגנית

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = b(x)$$

כמו במד"ר לינארית מסדר 1 מתקיים עיקרון הסופרפוזיציה. לכן באותו אופן, אם מצאנו פתרון כללי של גרסה ההומוגנית $y = y_H(x)$ וכן פתרון אחד מסוים (פרטי) של המד"ר האי-הומוגנית $y_p(x)$, אז הפתרון הכללי של המד"ר האי-הומוגנית נתון על ידי

$$y = y_H(x) + y_p(x)$$

דוגמה: ראינו באמצעות ניחוש פתרון והורדת סדר את הפתרון הכללי של המד"ר $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$:

$$y = Ae^x \ln|x| + Be^x$$

כעת נתבונן בגרסה אי-הומוגנית שלה: $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = x-1$. קל לנחש פתרון פרטי $y_p \equiv 1$. לכן הפתרון הכללי של המד"ר האי-הומוגנית הוא

$$y = 1 + Ae^x \ln|x| + Be^x$$

אנחנו יודעים למצוא פתרון כללי של ההומוגנית אם המקדמים קבועים. מה לגבי פתרון פרטי של אי-הומוגנית? נכיר שתי שיטות.

השיטה הראשונה מכונה השיטה של **וריאציית פרמטרים**. היא עובדת כך: קודם נמצא פתרון כללי של ההומוגנית,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

כעת נחפש פתרון פרטי שצורתו דומה לנ"ל, רק עם פונקציות במקום מקדמים קבועים:

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + \dots + c_n(x) y_n(x)$$

אנחנו נראה שאם עושים את זה נכון, זה תמיד מניב פתרון פרטי שלא קשה למצוא אותו.

הערה: יש n פונקציות נעלמות $c_1(x), \dots, c_n(x)$ אבל תנאי אחד בלבד עליהן (המד"ר).

וריאציית הפרמטרים עבור מד"ר מסדר 2

נתונה כעת $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$. נניח שמצאנו פתרון כללי של המד"ר ההומוגנית:

$$y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

נציע פתרון פרטי בשיטת וריאציית הפרמטרים

$$y_p = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

כדי להציב אותו למד"ר נחשב את הנגזרות שלו. העיקרון המנחה הוא שיש לנו n דרגות חופש פונקציונליות $c_1(x), \dots, c_n(x)$ ואנחנו צריכים רק אחת כדי שהמד"ר עצמה תתקיים. לכן נוכל להוסיף הנחות במהלך החישוב כדי להקל את ההצבה למד"ר.

ראשית:

$$y_p' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$$

זה ביטוי מסובך אבל אם נניח כי $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$ נקבל ביטוי קל יותר $y_p' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$. נגזור שוב ונקבל

$$y_p'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

לכן נקבל את הדרישה

$$\begin{aligned} g = y_p'' + p y_p' + q y_p &= c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 \cdot L[y_1] + c_2 \cdot L[y_2] + c_1' y_1' + c_2' y_2' = c_1' y_1' + c_2' y_2' \end{aligned}$$

כלומר לסיכום נקבל בסך הכל שתי דרישות על מנת ש- y_p יהיה פתרון פרטי של האי-הומוגנית:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = g(x) \end{cases}$$

נעיר שהתנאים האלו אינם הכרחיים לכך ש- $y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$ פתרון אבל הם מספיקים, ואנחנו מחפשים איזשהו פתרון כך שזה מספיק טוב.

נשים לב למבנה של התנאי שקיבלנו: זו מערכת משוואות לינארית עבור c_1', c_2' ומטריצת המקדמים היא מטריצת הורונסקיאן. לכן קיים למערכת פתרון יחיד עבור c_1', c_2' . משם נותרה רק אינטגרציה כדי למצוא את $c_1(x), c_2(x)$.

דוגמה: נתונה המד"ר $y'' + y = 1$. הפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית הוא

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

(ניתן לבדוק באופן ישיר, ובכל מקרה נראה בקרוב כיצד להגיע לזה). נציע אם כך פתרון פרטי $y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$ כאשר

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\text{לכן } c_1' = -\tan x c_2'$$

$$\tan x \cdot \sin x \cdot c_2' + c_2' \cos x = 1 \Rightarrow c_2' = \cos x, \quad c_1' = -\sin x$$

לכן

$$\begin{cases} c_1(x) = \cos x + m \\ c_2(x) = \sin x + k \end{cases}$$

לכן

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) = (\cos x + m) \cos x + (\sin x + k) \sin x = 1 + y_H(x)$$

למעשה, קיבלנו את הפתרון הכללי של האי-הומוגנית. הפתרון הפרטי של האי-הומוגנית שהשיטה סיפקה הוא $y_p(x) \equiv 1$.

השיטה הכללית של וריאציית פרמטרים

משפט 7: נניח שנתונה המד"ר הלא הומוגנית המנורמלת (1) כאשר $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x), q(x)$ רציפות בקטע I .

נסמן על ידי $y_1(x), \dots, y_n(x)$ בסיס של מרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית המתאימה בקטע I .

אז קיימות פונקציות $c_1(x), \dots, c_n(x) \in C^n(I)$ כך שהפונקציה

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x) \quad (5)$$

היא פתרון של המד"ר (1).

בנוסף, תנאי מספיק לכך שהפונקציה הנתונה על ידי (5) אכן תהיה פתרון של המד"ר (1) עבור $c_1, \dots, c_n \in C^n(I)$:

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \dots + c'_n y_n = 0 \\ \vdots \\ c'_1 y_1^{(n-2)} + c'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + c'_n y_n^{(n-2)} = 0 \\ c'_1 y_1^{(n-1)} + c'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + c'_n y_n^{(n-1)} = q(x) \end{cases} \quad (6)$$

לבסוף, אם פותרים את המערכת (6) ושומרים על קבועי אינטגרציה, אז מתקבל פתרון כללי של המד"ר (1).

נכתוב את המערכת (6) בצורה מטריצית:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ \vdots \\ c'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{pmatrix} \quad (7)$$

המטריצה הריבועית באגף שמאל הפיכה, כי הדטרמיננטה שלה היא הורונסקיאן של הפתרונות הבלתי תלויים בבסיס שהתחלנו ממנו.

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. תכונות של $\text{cis}(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$.

“ Hope for everything. Expect nothing.”

”

Maximilian Arturo, Sliders