

שבוע 4: הוכחת משפט הקיום והיחידות, עיקרון אי החיתוך, תחום הגדרה מקסימלי, מד"ר מסדר n

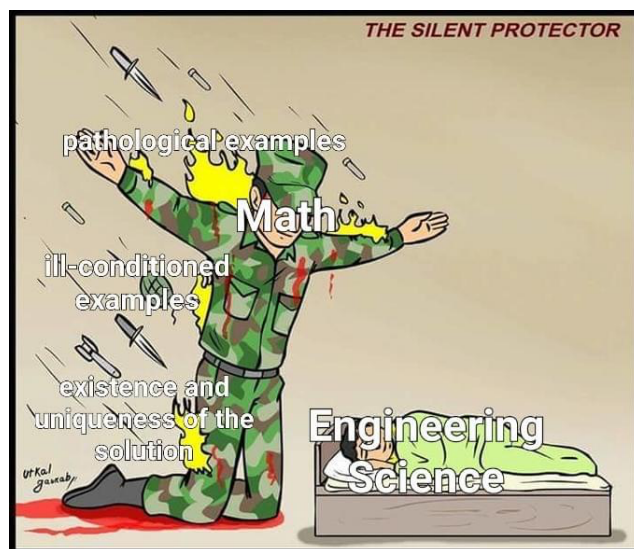
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

3	1 משפט הקיום והיחידות (המשך)
3	1.1 רעיון ההוכחה של משפט הקיום והיחידות
5	1.2 מסקנות ממשפט הקיום והיחידות
8	2 משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר n
8	2.1 משפט קיום ויחידות, מרחב הפתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית



תזכורות

משפט 1: תהי $y' = f(x, y)$ מד"ר מסדר 1. נניח כי y_1 פתרון של המד"ר בקטע $(a, b]$ וכן y_2 פתרון של המד"ר בקטע $[b, c)$. נניח לבסוף כי $y_1(b) = y_2(b)$. אז פונקציית התפר

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b] \\ y_2(x), & x \in [b, c) \end{cases}$$

היא פתרון של המד"ר בקטע (a, c) .

משפט 2: נניח כי $f(x, y)$ רציפה במלבן $T = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. נניח בנוסף שקיים $K > 0$ כך שלכל $(x, y_1), (x, y_2) \in T$ מתקיים כי

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|$$

(או, לחילופין: $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפה במלבן). נסמן $M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in T\}$, ונגדיר $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. אז לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד בקטע $[x_0 - h, x_0 + h]$.

1 | משפט הקיום והיחידות (המשך)

1.1 רעיון ההוכחה של משפט הקיום והיחידות

יצוג אינטגרלי של בעיית ההתחלה

למה 3: תהי $y(x)$ פונקציה רציפה בקטע I , ונניח כי $f(x, y)$ רציפה על הגרף של $y(x)$. אז $y(x)$ היא פתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

בקטע I אם ורק אם $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$ בקטע.

איטרציות פיקארד

הרעיון מאחורי הוכחת הקיום במשפט 2 (משפט הקיום והיחידות) הוא כדלקמן. ניקח כל פונקציה $y_0(x)$ שהגרף שלה מוכל במלבן $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ ונגדיר סדרה של פונקציות על ידי

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

תהליך זה מכונה **איטרציות פיקארד**. אז סדרת הפונקציות $(y_n(x))_{n=1}^\infty$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[x_0 - h, x_0 + h]$, והפונקציה הגבולית היא פתרון של המד"ר.

למעשה, לרעיון זה יש גם תועלת מעשית: המד"ר יכולה להיות קשה לפתרון מדויק ואנליטי. במקרה כזה, אפשר למצוא פתרון מקורב על ידי בחירת $y_0(x)$ מתאימה (לרוב, קבועה) וביצוע מספר איטרציות פיקארד לקבלת $y_n(x)$.

דוגמה: ניקח את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

זו בעיה שאנחנו דווקא יודעים לפתור במדויק: $y(x) = 2e^x$.

זה מועיל להתנסות בדוגמה כזו עם תהליך הקירוב המתואר מעלה.

ניקח $y_0(x) \equiv 2$. גם בלי לבדוק במדויק, זה ברור שהגרף של פונקציה זו מוכל במלבן מתאים. נחשב כעת:

$$\begin{cases} y_1(x) = 2 + \int_0^x 2 dt = 2 + 2x \\ y_2(x) = 2 + \int_0^x (2 + 2t) dt = 2 + 2x + x^2 \\ y_3(x) = 2 + \int_0^x (2 + 2t + t^2) dt = 2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

באופן כללי, נסו להוכיח באינדוקציה כי $y_n(x)$ בדוגמה זו הוא פולינום טיילור מסדר n של הפתרון $y(x) = 2e^x$. באופן זה, אכן נקבל כי $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ במידה שווה (בכל קטע חסום).

1.2 מסקנות ממשפט הקיום והיחידות

עיקרון אי החיתוך

משפט 4. נניח ש- $y_1(x), y_2(x)$ הם שני פתרונות שונים בקטע I של המד"ר $y' = f(x, y)$. אם $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות בסביבת הגרף של y_1 אז הפתרונות y_1, y_2 אינם נחתכים.

הערות:

- זה כמובן גם נכון תחת התנאים במשפט המקורי.
- זה נכון באופן כללי אם ידועה יחידות לאורך הגרף של $y_1(x)$.
או, לחילופין, אם ידועה יחידות לאורך הגרף של $y_2(x)$.

דוגמה: נתבונן בבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = (y-1) \sin(xy) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

כאן $f(x, y) = (y-1) \sin(xy)$ רציפה בכל $\mathbb{R}^2$. בנוסף, גם $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(xy) + x(y-1) \cos(xy)$ רציפה בכל $\mathbb{R}^2$.
לכן קיימת סביבה של $x=0$ שבה לבעיה יש פתרון יחיד.
זהירות: באופן כללי אין הבטחה שהפתרון $y(x)$ מוגדר לכל x ! בכל זאת, קיום ויחידות מתקיימים לכל אורך הגרף של הפתרון $y(x)$.
נשים לב כי $y \equiv 0$ וכן $y \equiv 1$ פתרונות של המד"ר המוגדרים לכל x . לכן הם לא יכולים לחתוך את הגרף של $y(x)$.
מכיוון ש- $y(0) = \frac{1}{2}$, נקבל לפי משפט ערך הביניים שבעצם מתקיים $0 < y(x) < 1$ לכל x בתחום ההגדרה של הפתרון.

באופן כללי, נוכל לחזק את המסקנה בעזרת משפט ערך הביניים כמו בדוגמה:

מסקנה: נניח כי $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות שונים של המד"ר $y' = f(x, y)$ בקטע I .

אם תנאי משפט הקיום והיחידות מתקיימים בסביבת הגרף של $y_1(x)$ אז $y_1 < y_2$ או $y_2 < y_1$ לכל $x \in I$.

תחום ההגדרה של פתרון

הגדרה: נניח שנתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

תחום הגדרה מקסימלי של פתרון $y(x)$ הוא קטע I עבורו מתקיימים התנאים הבאים.

1. הקטע I מכיל את הנקודה x_0 , ו- $y(x)$ פתרון של בעיית ההתחלה בכל I .
2. לא קיים קטע $J \supsetneq I$ אשר בו קיים פתרון $\tilde{y}(x)$ המקיים $\tilde{y}(x) = y(x)$ לכל $x \in I$.

כלומר, זהו קטע I מקסימלי אשר מכיל את x_0 ושאליו ניתן להרחיב את $y(x)$ כך שעדיין יהווה פתרון.דוגמה: ראינו שבבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר $y_0 > 0$ נתון, מתקבל הפתרון $y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - x^2}$.הוא מוגדר עבור $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}\right)$, ומקיים

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{y_0}}} y(x) = \infty$$

לכן $y(x)$ לא ניתן להרחבה כפתרון מעבר לקטע זה. זאת למרות שתנאי משפט הקיום והיחידות מתקיימים בכל מקום.

כלומר, תחום ההגדרה המקסימלי עלול להיות מאוד קטן למרות שאין לכך כל סימן מבעיית ההתחלה.

מסקנה ממשפט הקיום והיחידות לגבי תחום הגדרה מקסימלי

זה מוביל אותנו לשאלה העדינה הבאה. אם יש קיום ויחידות בכל מקום, האם יתכן שתחום ההגדרה המקסימלי הוא קטע מהצורה $[a, b]$ (כלומר, $y(a), y(b)$ מוגדרים)?משפט 5: לא יתכן שתחום ההגדרה המקסימלי של פתרון של המד"ר $y' = f(x, y)$ הוא קטע שמכיל קצה שבו מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות.כלומר, פתרון של בעיית התחלה אינו יכול להסתיים בנקודה שבסביבתה $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות.דוגמה: אם המד"ר היא $y' = 2xy^2$ כמו קודם, אז לא יתכן שפתרון מסתיים באף נקודה (x_1, y_1) . למשל, לא יכול להיות שתחום ההגדרה המקסימלי הוא $[-1, 1]$ אם $y(1) = 3$. אבל יתכן כפי שראינו שתחום ההגדרה המקסימלי יהיה $(-1, 1)$ (ואז ראינו כי $\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = \infty$).

המענה לניגוד שבין המסקנה לבין הדוגמה שבה הפתרון מפסיק להיות מוגדר בנקודה מסוימת, הוא שיתכן שנגדיל את תחום ההגדרה באינסוף שלבים שמתכנסים לאורך סופי.

הכללה של המסקנה לגבי תחום הגדרה מקסימלי

דוגמה: נחזור לבעיית ההתחלה שראינו קודם:

$$\begin{cases} y' = (y - 1) \sin(xy) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ראינו שמתקיים $0 < y(x) < 1$ לכל x בתחום ההגדרה של הפתרון. כעת נוכיח שהפתרון מוגדר לכל x .

נראה שתחום ההגדרה אינו חסום מלעיל. נניח בשלילה שכן ונסמן את הקצה הימני שלו על ידי $x = b$.

אם $x = b$ כלול בתחום, זו סתירה למסקנה.

אם $x = b$ אינו כלול בתחום, נוכיח שבכל זאת הגבול $\lim_{x \rightarrow b-} y(x)$ קיים. לכן ניתן להגדיר $y(b) = L$.

נשים לב כי y רציפה משמאל בנקודה $x = b$.

בנוסף,

$$\lim_{x \rightarrow b-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow b-} (y(x) - 1) \sin(xy(x)) = (L - 1) \sin(bL)$$

לכן לפי משפט מחדו"א, $y(x)$ גזירה משמאל בנקודה $x = b$ וכן

$$y'_-(b) = (L - 1) \sin(bL) = (y(b) - 1) \sin(by(b))$$

זו בדיוק המד"ר ולכן $x = b$ כלול בתחום ההגדרה. זו כאמור סתירה.

באופן דומה לדוגמה, נקבל חיזוק של המסקנה:

מסקנה: אם פתרון מוגדר משמאל ל- b ובנוסף $L = \lim_{x \rightarrow b-} y(x)$ קיים, ותנאי משפט הקיום והיחידות מתקיימים בסביבת הנקודה (b, L) , אז ניתן להרחיב את הגדרת הפתרון מימין לנקודה $x = b$.

כנ"ל עבור מוגדר מימין והרחבה שמאלה.

קיום ויחידות גלובלים

משפט 6: נניח כי $f(x, y)$ רציפה ב- $S = I \times \mathbb{R}$, כאשר I קטע אשר מכיל את הנקודה x_0 .

נניח בנוסף שקיים $K > 0$ כך שלכל $(x, y_1), (x, y_2) \in S$ מתקיים כי

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|$$

(לחילופין, חסומה בכל הפס (S)). אז קיים פתרון יחיד בכל הקטע I .

ההוכחה דומה להוכחה של משפט פיקארד לינדלוף, ולמעשה קצת יותר קלה.

הערה: במקרה זה הקטע סביב x_0 לא חייב להיות סימטרי.

2 | משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר n

2.1 משפט קיום ויחידות, מרחב הפתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית

הגדרות עבור מד"ר מסדר n

הגדרה: תהי $F(x, z_0, z_1, \dots, z_n)$ פונקציה של $n+2$ משתנים אשר באמת תלויה במשתנה z_n . המשוואה

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad x \in I$$

מכונה מד"ר מסדר n בקטע I .

באופן דומה לסדר 1, רצוי לחלץ (אם ניתן) את הנגזרת הגבוהה ביותר ולכתוב את המד"ר בצורה

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad x \in I \quad (3)$$

כאשר $f(x, z_0, \dots, z_{n-1})$ פונקציה של $n+1$ משתנים. משפטי קיום ויחידות וכן שיטות פתרון יסתמכו לעיתים קרובות על כך שהמד"ר כתובה בצורה זו.

נעיר שלרוב נשתמש בכתוב מקוצר: y במקום $y(x)$ וכו', כפי שהתרגלנו כבר בעיסוק במד"ר מסדר 1.

דוגמאות:

$$1. \sin(xy'') + (y')^3 = -e^y \quad \text{מד"ר מסדר 2.}$$

$$2. y''' - x^3 y'' + e^x y = 7 \quad \text{מד"ר לינארית מסדר 3.}$$

משפט קיום ויחידות עבור מד"ר כללית מסדר n

במקרה $n=1$ ראינו שבפתרון הכללי יש באופן טיפוסי קבוע אשר מייצג דרגת חופש אחת. לכן בעיות ההתחלה עירבו תנאי התחלה אחד בנוסף למד"ר, שהיה מהסוג $y(x_0) = y_0$.

ניתן גם להשתכנע שאם $y' = f(x, y)$ אז תנאי ההתחלה קובע כי $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ כך שזה יהיה לא טבעי לכלול בבעיית ההתחלה תנאי על $y'(x_0)$. בנוסף,

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) \cdot 1 + f_y(x, y(x)) \cdot y'(x)$$

ולכן

$$y''(x_0) = f_x(x_0, y_0) + y'(x_0) f_y(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) f_y(x_0, y_0)$$

נקבע גם הוא על סמך תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ יחד עם המד"ר. באופן זה, אם נתעלם משאלת הגזירות, כל הנגזרות של $y(x)$ בנקודה x_0 נקבעות באינדוקציה מתוך תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ והמד"ר.

במקרה של n כללי אנחנו נראה שיש בפתרון הכללי באופן טיפוסי n קבועים אשר מייצגים n דרגות חופש. לכן בעיות התחלה טבעיות יכללו n תנאי התחלה. בנוסף, מכיוון שהמד"ר היא כעת (3), הגיוני להכליל את התנאי הבודד $y(x_0)$ לרשימת תנאים על $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad (4)$$

משפט קיום ויחידות במקרה זה מזכיר את משפט פיקארד לינדלף.

משפט 7. אם $f, \frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n-1}}$ רציפות בסביבת הנקודה $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ אז קיימת סביבה של $x = x_0$ שבה לבעית ההתחלה (4) קיים פתרון יחיד.

לא נוכיח את המשפט כרגע, אבל נסתמך עליו. בהמשך, כאשר נדבר על מערכות של משוואות דיפרנציאליות רגילות, נתייחס לקשר שלהן למקרה הנוכחי ולהוכחת המשפט.

הערה: חשוב לשים לב שכל התנאים הם באותה נקודה $x = x_0$. המשפט לא מדבר על כל מקרה אחר. היזהרו שלא להתבלבל: עבור $n = 1$ המשמעות של יחידות היא שני פתרונות לא יכולים להיחתך, שכן $y(x_0) = \tilde{y}(x_0)$ אומר שבהכרח $y \equiv \tilde{y}$. עבור $n = 2$ שני הפתרונות

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{y}(x_0) = y_0, \\ \tilde{y}'(x_0) = \tilde{y}_1 \end{cases}$$

אינם זהים כאשר $y_1 \neq \tilde{y}_1$. אבל הם נחתכים בנקודה x_0 ! במקרה זה התנאי $y_1 \neq \tilde{y}_1$ אומר שהם אינם משיקים.

עבור n כללי, פתרונות יכולים גם להשיק. הם שונים כל עוד אחד מ- n הערכים בתנאי ההתחלה שונה.

משפט קיום ויחידות עבור מד"ר לינארית מסדר n

הגדרה: מד"ר לינארית מסדר n היא

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x)$$

הפונקציות $a_n(x), \dots, a_0(x)$ מכונות מקדמי המשוואה.

הפונקציה $b(x)$ מכונה החלק האי הומוגני.

נאמר שהמד"ר היא הומוגנית אם $b(x) \equiv 0$, ואחרת נאמר שהיא אי הומוגנית.

נאמר שהמד"ר היא מנורמלת אם $a_n(x) \equiv 1$.

נהוג לאגד את הפעולות אשר מופעלות על y באגף שמאל של המד"ר ולסמן עבור פונקציה כללית:

$$L[y] = a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y$$

זהו אופרטור דיפרנציאלי: לכל $y \in C^n(I)$ מתקיים כי $L[y] \in C(I)$. כלומר, $L : C^n(I) \rightarrow C(I)$. מדובר באופרטור לינארי (ומכאן השם מד"ר לינארית). נרחיב מיד.

דוגמאות:

1. המד"ר $2y'' + y' - y = x$ היא לינארית מסדר 2, אי הומוגנית ולא מנורמלת. המד"ר $y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = \frac{x}{2}$ מנורמלת ושקולה אליה.
2. המד"ר $x^2y''' - 2x^3y' + 8y = 0$ היא לינארית מסדר 3, הומוגנית ולא מנורמלת. אפשר "לנרמל" אותה בקטעים שלא מכילים את הנקודה $x = 0$, כמו קודם, על ידי חלוקה ב- x^2 .

אם המד"ר אינה מנורמלת, לרוב ננרמל אותה על ידי חלוקה ב- $a_n(x)$ בקטעים שבהם היא אינה מתאפסת ונקבל צורה מנורמלת כללית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \quad (5)$$

אם $a_n(x)$ לא מתאפס בקטע אז מקבלים מד"ר שקולה ואחרת כל מקרה לגופו.

בסימונים של משפט הקיום והיחידות הכללי, $F(x, z_0, \dots, z_{n-1}) = q(x) - p_{n-1}(x)z_{n-1} - \dots - p_0(x)z_0$, היא רציפה כאשר $q(x), p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$ הם פונקציות רציפות במשתנה יחיד. מתברר שעבור מד"ר לינארית ניתן לשפר משמעותית את משפט הקיום והיחידות:

משפט 8. נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

אם $q(x), p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$ הם פונקציות רציפות בקטע I אשר מכיל את הנקודה x_0 , אז לבעיה קיים פתרון יחיד והוא מוגדר בכל I .

ההבדל המשמעותי הוא שמובטח כי תחום ההגדרה של הפתרון הוא כל I , ולא רק סביבה בלתי צפויה של x_0 .

זהו למעשה מקרה פרטי של משפט הקיום והיחידות הכללי עבור מערכות מד"ר שנדבר עליו בעתיד (כאשר גם נראה כאמור את הקשר בין מערכת מד"ר לבין מסדר גבוה).

עיקרון הסופרפוזיציה

הגדרה: נסמן את אוסף כל הפונקציות $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ אשר גזירות n פעמים בכל הקטע I (חד צדדית בקצוות, אם יש קצוות) על ידי $D^n(I)$.

זהו למעשה מרחב וקטורי, שהוא תת מרחב של אוסף כל הפונקציות המוגדרות בקטע I .

משפט 9: נניח שהפונקציות $a_0(x), \dots, a_n(x)$ מוגדרות בקטע I . נסמן

$$L[y] = a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y$$

אז L הוא אופרטור לינארי מהמרחב $D^n(I)$ לתוך מרחב הפונקציות המוגדרות בקטע I .

המסקנה הבאה מכונה לעיתים בעצמה עיקרון הסופרפוזיציה.

מסקנה: נניח שהפונקציות $a_0(x), \dots, a_n(x)$ מוגדרות בקטע I .

1. אם y_1 ו- y_2 פתרונות של המד"ר ההומוגנית

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (6)$$

אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\alpha y_1 + \beta y_2$ גם פתרון של המד"ר ההומוגנית (6).

כלומר, קבוצת הפתרונות של המד"ר ההומוגנית (6) היא תת מרחב וקטורי של $D^n(I)$.

2. תהי $b(x)$ מוגדרת גם היא בקטע I . אם y_1 ו- y_2 פתרונות של המד"ר האי-הומוגנית

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (7)$$

(כלומר, עם אותו חלק אי-הומוגני) אז $y_2 - y_1$ הוא פתרון של המד"ר ההומוגנית (6).

3. אם y_p הוא פתרון פרטי של המד"ר האי-הומוגנית (7), אז $y(x)$ הוא פתרון של המד"ר האי-הומוגנית (7) אם ורק אם קיים פתרון y_H של המד"ר ההומוגנית (6) כך שמתקיים $y = y_H + y_p$.

הסעיף האחרון לעיתים מנוסח כך: אם $y = y_H$ הוא פתרון כללי של המד"ר ההומוגנית ו- y_p הוא פתרון פרטי של המד"ר האי-הומוגנית, אז $y_{NH} = y_H + y_p$ הוא פתרון כללי של המד"ר האי-הומוגנית.

זה לא בדיוק אותו דבר, כי פתרון כללי לא חייב תמיד לכסות את כל הפתרונות האפשריים, כפי שראינו בעבר. אבל שני הניסוחים נכונים, כמעט שקולים אחד לשני, ושימושיים.

מרחב הפתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מסדר n

ראינו בעיקרון הסופרפוזיציה שאוסף הפתרונות של מד"ר הומוגנית מהווה מרחב וקטורי. כעת נראה שאם המד"ר מנורמלת אז מימד המרחב הוא תמיד בדיוק n .

משפט 10. נניח כי $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$ רציפות בקטע I . אז אוסף הפתרונות של המד"ר (5) עם $q(x) \equiv 0$ (כלומר, הומוגנית) אשר מוגדרים ב- I מהווה תת מרחב וקטורי של $C^n(I)$ בעל מימד n .

כלומר, ניתן למצוא n פתרונות $y_1, \dots, y_n$ כך שכל פתרון ניתן לכתיבה באופן יחיד כצירוף לינארי שלהם

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x), \quad \forall x \in I$$

בעצם, זו תהיה בדיוק ההוכחה: נתאר את $y_1, \dots, y_n$ ונראה שהם מקיימים את הנ"ל.

הערה: בהתאם להגדרה מאלגברה לינארית, הפונקציות $y_1, \dots, y_n$ הן **תלויות לינארית** אם קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ שאינם כולם 0 כך ש-

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \quad \forall x \in I$$

הערה: ניתן למעשה להוכיח את המשפט באופן קצר יותר.

נסמן את מרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית על ידי V .
 בעזרת משפט הקיום והיחידות, ההעתקה $T : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ אשר מעתיקה רשימה של תנאי התחלה אל הפתרון היחיד המתאים להם היא חד חד ערכית ועל.
 לא קשה לבדוק כי T העתקה לינארית (עשינו זאת בהוכחה הנ"ל). לכן T איזומורפיזם, ולכן לפי משפט מאלגברה לינארית

$$\dim(V) = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:
 1. תכונות של שורשים של פולינומים (מציאת ריבוי, ניהוש אינטליגנטי, שורש לא ממשי של פולינום ממשי בא עם הצמוד שלו).

“ True rigour is productive, being distinguished in this from another rigour which is purely formal and tiresome, casting a shadow over the problems it touches.

”

Émile Picard