

שבוע 3: משוואות מדויקות וגורם אינטגרציה, משפט הקיום והיחידות

יוחאי מעין

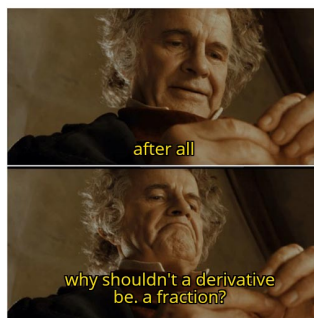
הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	משוואות דיפרנציאליות רגילות לא לינאריות מסדר ראשון (המשך)
2	1.1	משוואות מדויקות
7	2	משפט הקיום והיחידות
7	2.1	משפט הקיום והיחידות

$$dp/dt = dp/dx * dx/dt$$



משוואות דיפרנציאליות רגילות לא לינאריות מסדר ראשון (המשך)

1.1 משוואות מדויקות

צורת רישום מיוחדת עבור מד"ר מסדר 1

דוגמאות:

1. $x^2 dx - 2 \sin y dy = 0$. מה פירוש השוויון הזה?

זו צורת סימון חדשה למד"ר מסדר 1. הכוונה היא: $x^2 - (2 \sin y) y' = 0$.

2. הפירוש של $e^x dx - 2y dy = 0$ הוא $e^x - 2yy' = 0$.

באופן כללי, לעיתים נכתוב

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

ונתכוון למד"ר

$$P(x, y) + Q(x, y) y' = 0$$

מבחינה ויזואלית, כביכול "חילקנו ב-dx" והשתמשנו בסימון $\frac{dy}{dx} = y'$. זו רק דרך לזכור, ולא באמת פעולה נכונה באופן כללי.

דוגמה: אפשר גם לעשות מעבר הפוך. למשל, אם נתונה המד"ר $xy - 2xy' = 0$, אפשר לכתוב אותה $xy dx - 2x dy = 0$.

הגישה התמימה

המוטביציה מאחורי שימוש בצורת רישום זו: היא תעזור לפתור בשיטה מסוימת שנלמד כעת. נתחיל בדוגמה מקדימה (ספוילר) לאופן הפתרון במקרה כזה.

דוגמה: נניח שנתונה המד"ר

$$ye^{xy} dx + xe^{xy} dy = 0$$

כאן

$$\begin{cases} P(x, y) = ye^{xy} \\ Q(x, y) = xe^{xy} \end{cases}$$

הכוונה היא למד"ר $ye^{xy} + xe^{xy} y' = 0$. נעיר שזו מד"ר שאנו כבר מסוגלים לפתור כי היא לינארית בהסוואה. נתעלם מכך לצורך ההדגמה.

השיטה תעבוד כך: אם מוצאים פונקציה $F(x, y)$ אשר מקיימת את התנאים

$$\begin{cases} F_x = P \\ F_y = Q \end{cases}$$

אז $F(x, y(x)) = C$ הוא פתרון כללי של המד"ר בצורה סתומה.

במקרה שלנו, אפשר לבחור $F(x, y) = e^{xy}$. לכן הפתרונות נתונים בצורה סתומה על ידי $e^{xy(x)} = C$.

חשוב לציין שבשלב חיפוש הפונקציה $F(x, y)$, חושבים על x, y כשני משתנים בלתי תלויים.

בצורת הפתרון הכללי, y מסמן פתרון של $y(x)$.

הצדקה תיאורטית לגישה התמימה

משפט 1. אם בתחום D מתקיים כי $P(x, y), Q(x, y)$ רציפות וקיימת פונקציה $F(x, y)$ בעלת נגזרות חלקיות עבורה $\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q$, אז פונקציה גזירה $y(x) \in D$ עברה בקטע ההגדרה של y היא פתרון של המד"ר (1) אם ורק אם הביטוי $F(x, y(x))$ קבוע (בקטע ההגדרה של y).

בקצרה: אם $\vec{\nabla} F = (P, Q)$ אז $F(x, y) = C$ הוא פתרון כללי של המד"ר $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ לסיכום, בהינתן מד"ר

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

נחפש $F(x, y)$ שמקיימת $\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q$ ואז $F(x, y) = C$ פתרון כללי של המד"ר.

דוגמאות:

1. המד"ר $2xy dx + (x^2 + 3y^2) dy = 0$ ניתנת לפתרון כמו בדוגמה הפשוטה שראינו, רק שצריך להתאמץ קצת יותר. כאן $P = 2xy$ ו- $Q = x^2 + 3y^2$. אנחנו מחפשים $F(x, y)$ שמקיימת $F_x = P$ ו- $F_y = Q$:

$$F_x = 2xy \Rightarrow F(x, y) = x^2 y + h(y)$$

לכן $x^2 + 3y^2 = F_y = x^2 + h'(y)$ ונקבל $h'(y) = 3y^2$ כך שניתן לבחור למשל $h(y) = y^3$ ובסך הכל

$$F(x, y) = x^2 y + y^3 = C$$

2. נתונה המד"ר $2xy dx + (2x^2 + y^2) dy = 0$. נקבל כמו קודם $F = x^2 y + h(y)$ ולכן

$$2x^2 + y^2 = F_y = x^2 + h'(y) \Rightarrow h'(y) = x^2 + y^2$$

זו סתירה! מה התקלקל?

מד"ר מדויקת

הגדרה 2. המד"ר $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ נקראת **מדויקת** בתחום $D \subset \mathbb{R}^2$ אם קיימת $F(x, y)$ שמקיימת $F_x = P$ ו- $F_y = Q$ עברה $\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q$ ב- D .

מתברר שהשיטה לא תמיד עובדת. בעצם, צריך מזל גדול כדי שהיא תעבוד. על מנת שתהיה F שמקיימת $F_x = P$ ו- $F_y = Q$ צריך בהכרח להתקיים התנאי

$$\begin{cases} P_y = F_{xy} \\ Q_x = F_{yx} \end{cases}$$

תראו בחדו"א 2 שאם F_{xy}, F_{yx} רציפות אז הן שוות. זה נקרא **משפט שוורץ**. לכן במקרה זה בהכרח $P_y \equiv Q_x$.

מסקנה: אם $P, Q \in C^1$ ולא מתקיים $P_y \equiv Q_x$ בתחום D אז המד"ר אינה מדויקת.

בדוגמה השניה, $P_y = 2x$ אבל $Q_x = 4x$. הם לא שווים באף תחום (קבוצה פתוחה וקשירה) ולכן השיטה נכשלה.

דוגמה: ננסה לפתור את המד"ר $(3x^2y + e^x) dx + (x^3 - 4y^3) dy$. נבדוק אם המשוואה מדויקת:

$$P_y = 3x^2, \quad Q_x = 3x^2$$

הם שווים ולכן השיטה אמורה לעבוד:

$$F_x = P = 3x^2y + e^x \Rightarrow F = x^3y + e^x + h(y) \Rightarrow x^3 + h'(y) = F_y = Q = x^3 - 4y^3$$

לכן $h'(y) = -4y^3$ ווכל לבחור $h(y) = -y^4$. נקבל פתרון כללי

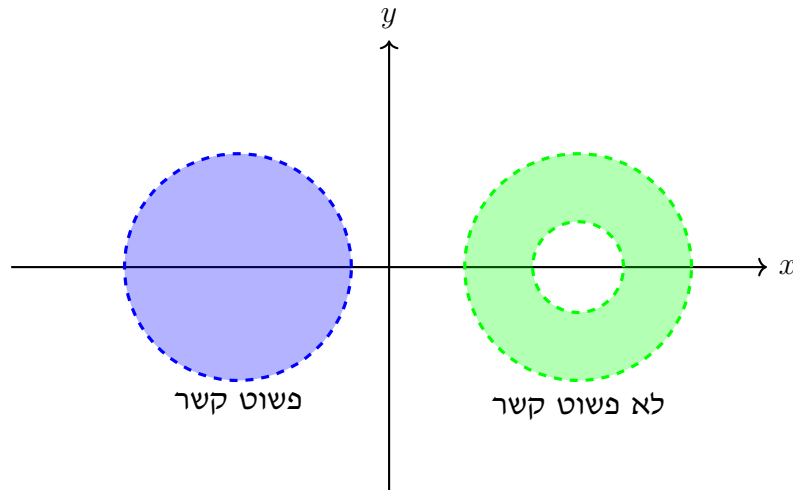
$$x^3y + e^x - y^4 = C$$

קיום של פונקצית פוטנציאל

המשפט הבא יוכח בחדו"א 2.

משפט 3: אם P, Q בעלות נגזרות חלקיות רציפות וכן $P_y \equiv Q_x$ בתחום D שאין בו חורים אז קיימת $F(x, y)$ עברה $\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q$, כלומר $Pdx + Qdy = 0$ מדויקת ב- D .

תחום ללא חורים מכונה **פשוט קשר**.



כלומר, אם התנאי $P_y \equiv Q_x$ מתקיים ובכל זאת השיטה לא עובדת, כנראה שהתחום אינו פשוט קשר. במקרה כזה כדאי לפרק את התחום הדו מימדי לאיחוד של מספר תחומים פשוטי קשר, ולפתור בכל תת תחום בנפרד.

דוגמה: עבור $P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ מתקיים כי $P_y \equiv Q_x$ בתחום הגדרתן אבל חיפוש מראה שאין $F(x, y)$. לכן המד"ר המתאימה אינה מדויקת. זו לא סתירה כי התחום אינו פשוט קשר: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

הבאה לצורה מדויקת באמצעות גורם אינטגרציה

דוגמה: נתונה המד"ר $2y dx + x dy = 0$. היא אינה מדויקת כי $P_y = 2 \neq 1 = Q_x$. לכן אין טעם לחפש F , אין כזו.

בכל זאת, המצב לא אבוד: אם נכפול את המד"ר ב- x אז נקבל $2xy dx + x^2 dy = 0$, ולפחות בכל קטע שאינו מכיל את $x = 0$ מדובר במד"ר שקולות. זו כבר משוואה מדויקת כי $2x = 2x$, ולכן אפשר לחפש F :

$$F_x = 2xy \Rightarrow F(x, y) = x^2y + h(y) \Rightarrow x^2 = F_y = x^2 + h'(y)$$

לכן אפשר לבחור $h(y) \equiv 0$ ולקבל פתרון כללי $x^2y = C$, כלומר $y = \frac{C}{x^2}$.

באופן כללי, אם $P dx + Q dy = 0$ אינה מדויקת, נכפול בגורם אינטגרציה $\mu(x, y)$ ונקבל

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0$$

המד"ר החדשה שקולה למקורית בתנאי ש- $\mu \neq 0$. התנאי שצריך להתקיים הוא

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x \iff \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \iff Q\mu_x - P\mu_y + (Q_x - P_y)\mu = 0$$

מדובר במשוואה דיפרנציאלית חלקית לינארית מסדר 1 עבור μ . אנחנו לא נעסוק בכאלה באופן כללי, אבל לפעמים אם יש מזל ניתן למצוא פתרון μ במסגרת הכלים שיש לנו.

גורם אינטגרציה אשר תלוי במשתנה אחד בלבד

דוגמה: נתונה $(x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0$. היא אינה מדויקת כי $P_y = 2y \neq Q_x = y$.

נחפש μ כלשהו שמקיים

$$xy\mu_x - (x^2 + y^2 + x)\mu_y - y\mu = 0$$

אנחנו לא יודעים לפתור, אבל מספיק למצוא μ אחד.

אולי יש μ שאינו תלוי ב- y : $\mu_y = 0$. אם כן, הוא צריך לקיים

$$xy\mu_x - y\mu = 0$$

לכן בתנאי ש- $y \neq 0$, $x\mu_x - \mu = 0$ ולכן $\mu = x$.

נקבל

$$(x^3 + xy^2 + x^2) dx + x^2y dy = 0$$

ונוכל למצוא F :

$$F_y = x^2y \Rightarrow F = \frac{1}{2}x^2y^2 + h(x) \Rightarrow x^3 + xy^2 + x^2 = xy^2 + h'(x)$$

כלומר $h'(x) = x^3 + x^2$ ולכן אפשר לבחור $h = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$ ולקבל את הפתרון

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 = C$$

אם יש μ שתלוי רק ב- x אז הוא צריך לקיים

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$$

לכן הבדיקה פשוטה: אם אגף ימין תלוי גם ב- y , אין $\mu(x)$. אם הוא תלוי רק ב- x , אז אפשר לפתור ולקבל

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$$

באופן דומה יהיה μ שתלוי רק ב- y אם אגף ימין בשוויון הבא אינו תלוי ב- x :

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{Q_x - P_y}{P}$$

במקרה זה,

$$\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$$

הערה: אם $\mu(x, y) \neq 0$ בתחום אז המד"ר לאחר הכפל ב- μ שקולה למד"ר הנתונה. אחרת, כל מקרה לגופו.

2 | משפט הקיום והיחידות

2.1 משפט הקיום והיחידות

דוגמאות שבהן אין קיום או אין יחידות

דוגמאות:

1. ראינו שבדוגמה של דלי שמתרוקן:

$$\begin{cases} y' = -\sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

מתקבלים אינסוף פתרונות. כלומר, אין יחידות. זה הגיוני: אם הדלי ריק בזמן 1, לא ידוע אם בדיוק סיים להתרוקן ברגע זה או שהיה ריק כבר זמן מה. אולי אפילו היה ריק מאז ומעולם.

2. נתבונן בבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} xy' + 2y = x^6 \\ y(0) = 7 \end{cases}$$

זו מד"ר לינארית. נכתוב אותה בצורה מנורמלת: $y' + \frac{2}{x}y = x^5$.

נכפול בגורם אינטגרציה $\mu(x) = x^2$ ונקבל

$$y = \frac{1}{8}x^6 + \frac{c}{x^2}$$

הפתרון היחיד שמוגדר בסביבת $x=0$ הוא $y = \frac{1}{8}x^6$, אבל $y(0) = 0 \neq 7$ ולכן אין פתרון לבעיה.

זה מסתדר עם העובדה שבצורתה המנורמלת יש אי מוגדרות בנקודה $x=0$.

משפט פיקארד-לינדלוף

משפט 4. נניח כי $f(x, y)$ רציפה במלבן $T = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. נניח בנוסף שקיים $K > 0$ כך שלכל $(x, y_1), (x, y_2) \in T$ מתקיים כי

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|$$

נסמן $M = \max \{|f(x, y)| : (x, y) \in T\}$, ונגדיר $h = \min \left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. אז לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד בקטע $[x_0 - h, x_0 + h]$.

הערה: אפשר להגדיל מעט את הקטע שבו ידוע שיש קיום ויחידות, אבל בדרך כלל זה לא יהיה לנו חשוב. בכל זאת נציין שבמקום קטע סימטרי, אפשר לסמן

$$M_+ = \max \{|f(x, y)| : x_0 \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

$$M_- = \max \{|f(x, y)| : x_0 - a \leq x \leq x_0, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

$$\text{ואז להגדיר } h_{\pm} = \min \left\{a, \frac{b}{M_{\pm}}\right\}$$

ההוכחה של המשפט אז עובדת באופן דומה, ומראה שיש קיום ויחידות בקטע $[x_0 - h_-, x_0 + h_+]$.

התנאי שבמשפט (קיים $K > 0$ כך ש...) מכונה **תנאי ליפשיץ לפי y לכל x קבוע**. הוא יכול להיות לא נוח לבדיקה. הלמה הבאה נותנת תנאי חזק יותר, אשר נוח יותר לבדיקה.

למה 5: אם $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ מוגדרת וכן $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq K$ במלבן $R = [a, b] \times [c, d]$ אז לכל $x \in [a, b]$ וכן $y_1, y_2 \in [c, d]$ מתקיים כי $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|$.

לפי משפט וירשטראס, פונקציה רציפה במלבן סגור היא תמיד חסומה. לכן נקבל את משפט הקיום והיחידות בגרסה פשוטה יותר:

מסקנה: נניח כי $f(x, y)$ וכן $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ רציפות בסביבת הנקודה (x_0, y_0) . אז עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

קיימת סביבה של x_0 שבה קיים פתרון יחיד לבעיה.

יתכן כמובן שהפתרון יהיה מוגדר מעבר לסביבה זו של x_0 , ואפילו כל $\mathbb{R}$. מנגד, היחידות מובטחת רק בסביבה.

דוגמאות של מצבים עם ובלי קיום יחידות

דוגמאות:

1. בבעיית הדלי המתרוקן מתקיים כי $f(x, y) = -\sqrt{y}$ שאינה מוגדרת באף סביבה של הנקודה $(1, 0)$. לכן היא בוודאי לא רציפה בסביבת הנקודה ולמעשה אפילו לא בנקודה עצמה.

בנוסף $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$ שאינה רציפה גם היא, אבל זה אפילו לא משנה כי f אינה רציפה בנקודה.

2. בבעיה השניה שראינו, שבה לא היה קיום, המד"ר הייתה $xy' + 2y = x^6$, כלומר $y' = x^5 - \frac{2y}{x}$.

לכן $f(x, y) = x^5 - \frac{2y}{x}$ וזו לא רציפה בנקודה $(0, 7)$ שהתאימה לתנאי ההתחלה. 3. נתבונן בבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

כאן $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$ רציפה בסביבת $(0, 0)$ (ובעצם בכל המישור) אבל $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3y^{2/3}}$ אינה רציפה בנקודה $(0, 0)$. זה לא מחייב שאין קיום יחידות, אבל המשפט אינו בתוקף.

בדקו - מתקבלים אינסוף פתרונות.

4. נתונה הבעיה

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

נראה שתנאי המשפט מתקיימים.

ראשית, $f(x, y) = 2xy^2$ רציפה בכל $\mathbb{R}^2$.

בנוסף, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4xy$ גם רציפה בכל $\mathbb{R}^2$.

נפתור. ראשית, $y \equiv 0$ פתרון סינגולרי. כעת,

$$\frac{y'}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

נציב תנאי התחלה. אם $y_0 = 0$ אז מתקבל $y \equiv 0$.

אם $y_0 \neq 0$ אז $y_0 = -\frac{1}{c}$ ולכן $c = -\frac{1}{y_0}$.

לכן יש באמת פתרון יחיד: $y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - x^2}$

יש כאן תופעה מוזרה: אם $y_0 > 0$ אז הפתרון מוגדר רק עבור $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}\right)$, למרות שתנאי המשפט מתקיימים בכל $\mathbb{R}^2$. כלומר, זו בעיה שבה תחום ההגדרה קטן מהמצופה.

זה בעצם מסתדר עם המשפט. החסם M במשפט תלוי בבחירת a, b באופן הבא: $M = 2a(y_0 + b)^2$

לכן $h = \min \left\{ a, \frac{b}{2a(y_0+b)^2} \right\}$. נסו לקבוע איך לבחור את a, b כך שמתקבל h גדול ביותר שניתן. מהו ה- h המתקבל?

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. נגזרות חלקיות של פונקציה בשני משתנים $F(x, y)$.
2. המשפט היסודי של החדו"א.
3. תלות ואי תלות לינארית במרחב וקטורי, בסיס ומימד.
4. איזומורפיזם בין שני מרחבים וקטורים משמר את המימד, כולל ההוכחה.

“ It is possible to commit no mistakes and still lose. That is not a weakness. That is life.

”

Jean-Luc Picard