

שבוע 2: מד"ר פרידה, שדה כיוונים, יציבות

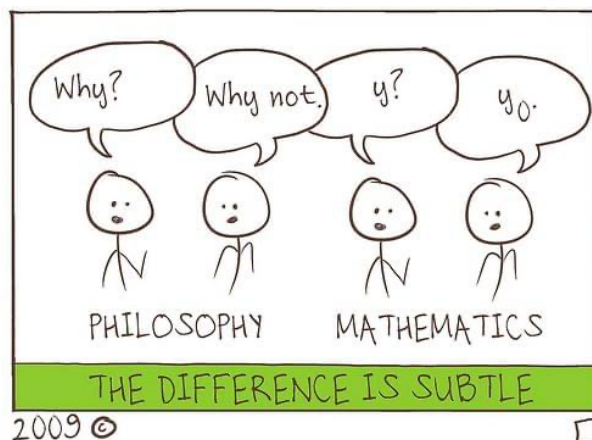
יוחאי מעין

הערות

- המסמך הזה מכיל הערכה לא סופית ולא מחייבת של החומר שיועבר בהרצאות.
- יתכנו חוסרים, שגיאות וכל מיני אי התאמות אחרות ביחס למה שיועבר בפועל.
- הוכחות ינתנו בהרצאות. יש להכיר ולהבין אותן. פירוט נוסף בדוגמאות ובכלל ינתן בהרצאות.
- הגדרות מרכזיות ומשפטים מרכזיים מובלטים במסגרת צבעונית. יש להכיר היטב גם את ההגדרות ואת המשפטים שאינם מרכזיים.
- החומר המחייב הוא החומר אשר מועבר בהרצאות בפועל.
- דיווחים על טעויות במייל yohaim@tauex.tau.ac.il יעזרו מאוד ויתקבלו בשמחה.

תוכן העניינים

2	1	משוואות דיפרנציאליות רגילות לא לינאריות מסדר ראשון
2	1.1	פתרון בהפרדת משתנים
5	1.2	תפירה של פתרונות
8	1.3	פירוש ופיענוח גיאומטרי
13	1.4	יציבות ויציבות אסימפטוטית



משוואות דיפרנציאליות רגילות לא לינאריות מסדר ראשון

1.1 פתרון בהפרדת משתנים

השיטה של הפרדת משתנים

נעבור כעת למד"ר כללית מסדר ראשון: $F(x, y, y') = 0$. באופן כללי קשה לפתור מד"ר שאינה לינארית, אבל במקרה שניתן להפריד משתנים כמו במד"ר לינארית הומוגנית, השיטה שראינו תעבוד. יש צורך להיזהר מעט בפרטים כפי שנראה.

דוגמאות:

1. נפתור את המד"ר $y' = (1 + y^2)(x + 1)$. במקרה הזה נוכל לחלק בביטוי $y^2 + 1$ שכידוע לא מתאפס לעולם ולקבל

$$\frac{y'}{y^2 + 1} = x + 1$$

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה זו, של אגף אחד שיש בו רק x ואגף שני שיש בו רק y' מוכפל בביטוי שמכיל את y בלבד, אז אומרים שהמד"ר **ניתנת להפרדה**. בכל מקרה כזה ניתן לפתור על ידי הפעלת אינטגרציה:

$$\int \frac{y'}{y^2 + 1} dx = \int (x + 1) dx$$

כי האינטגרל שנראה כביכול מסובך באגף שמאל ניתן לפתרון על ידי ההצבה $y = y(x)$ עבורה $dy = y' dx$. נקבל:

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{x^2}{2} + x + C \Rightarrow \arctan(y) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

בתנאי שמתקיים $-\frac{\pi}{2} < \frac{x^2}{2} + x + C < \frac{\pi}{2}$.

הגענו לפתרון של המד"ר **בצורה סתומה**: לא בצורה מפורשת $y(x) = \dots$. בכל מקרה בו ניתן לחלק ולהגיע לצורה מפורשת, יש לעשות זאת. כאן למשל זה אפשרי: $y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)$.

מעניין לשים לב שלפתרונות הללו אין תחום הגדרה שהוא כל $\mathbb{R}$, בעוד שהמד"ר מוגדרת בכל $\mathbb{R}$. אנחנו נראה שזה יהיה הבדל מהותי בין מד"ר לינארית מנורמלת לבין מד"ר כללית: תחום ההגדרה של פתרונות יכול להיות מוגבל ולא בגלל שהמד"ר עצמה אינה מוגדרת.

2. נפתור את המד"ר $N' = kN\left(1 - \frac{N}{L}\right)$. נציין שזו דרך אחרת לכתוב את המד"ר $N' = kN - mN^2$ אשר מכונה **המשוואה הלוגיסטית**. היא ממדלת גודל של אוכלוסייה שיש בה ילודה מצד אחד ומלחמה על משאבים מצד שני.

המד"ר הזו אוטונומית (המשתנה לא מופיע בה במפורש) ולכן היא ניתנת להפרדה בקלות:

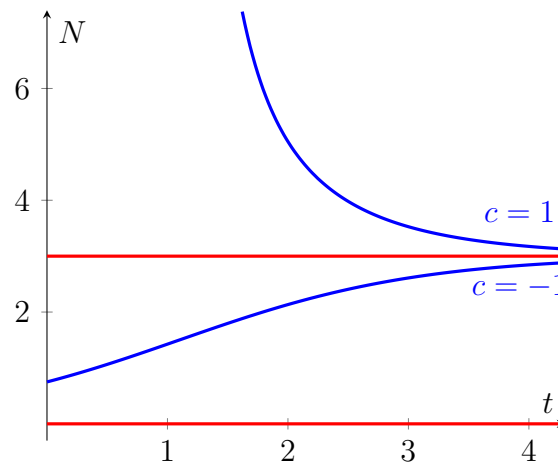
$$\frac{N'}{N(1-\frac{N}{L})} = k \Rightarrow \int \frac{dN}{N(1-\frac{N}{L})} = kt + C$$

מכאן נקבל על ידי חישוב כי

$$N(t) = \frac{1}{ce^{-kt} + \frac{1}{L}}, \quad c \neq 0 \quad (1)$$

הערה חשובה שנרחיב עליה מיד היא שבניגוד לדוגמה הקודמת, בשלב הראשון של ההפרדה חילקנו בביטוי $N(1-\frac{N}{L})$ שמתאפס במקרים $N=0$ וכן $N=L$. כלומר, לא סיימנו לגמרי את הטיפול במד"ר. נרחיב כאמור מיד.

שרטוט של שני פתרונות:



באופן כללי, נניח שניתן להביא את המד"ר לצורה

$$y' = g(y)h(x) \quad (2)$$

אז לכל פתרון $y(x)$ שמקיים $g(y(x)) \neq 0$:

$$\frac{y'}{g(y)} = h(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x) dx}{g(y(x))} = \int h(x) dx = H(x) + C$$

כאשר $H(x)$ פונקציה קדומה של $h(x)$.

נניח שקיימת פונקציה קדומה $Q(y)$ של $\frac{1}{g}$ בקטע כלשהו J (בפרט, בקטע זה $g(y) \neq 0$). אז

$$Q(y) = H(x) + C$$

זהו פתרון כללי בצורה סתומה. נשים לב שמתחייב כי $y(x) \in J$ עבור פתרון כזה, ובפרט $g(y(x)) \neq 0$.

מוסכמה: אם ניתן לחלץ את y בצורה סבירה אז יש לעשות זאת, וכך לקבל פתרון כללי בצורה מפורשת.

הערה: אם $y(x)$ גזירה בקטע מסוים I ומקיימת $Q(y(x)) = H(x) + C$, אז היא פתרון. כדאי שוב לציין שמתחייב כי $y(x) \in J$, ובפרט $g(y(x)) \neq 0$.

פתרונות סינגולריים

נתמקד כעת באפשרות של חלוקה באפס בשלב ההפרדה.

דוגמה: בדוגמה האחרונה של המשוואה הלוגיסטית $N' = kN(1 - \frac{N}{L})$ חילקנו בביטוי שמתאפס כאשר $N = 0$ וכאשר $N = L$.

ראשית, שתי הפונקציות הקבועות $N(t) \equiv 0$ ו- $N(t) \equiv L$ פותרות את המשוואה. אפשר לכלול את $N(t) \equiv L$ אם מאפשרים $c = 0$ בפתרון הכללי (1). הפתרון $N(t) \equiv 0$, מצד שני, אינו כלול בפתרון הכללי לאף ערך של $c \in \mathbb{R}$.

במקרה כזה נאמר ש- $N(t) \equiv 0$ הוא **פתרון סינגולרי** (יוצא דופן): פתרון שאינו כלול בפתרון הכללי, שמגיעים אליו באופן יוצא דופן שלא כמו כל שאר הפתרונות.

נעיר שלעיתים מכנים גם את $N(t) \equiv L$ פתרון סינגולרי, כי הוא צץ באופן יוצא דופן, ולא מתקשים לוודא שאינו יכול להיות כלול בצורת הפתרון הכללי.

לסיכום, בהינתן מד"ר אשר ניתנת להפרדה (2), לכל ערך y_0 כך ש- $g(y_0) = 0$ מתאים פתרון $y(x) \equiv y_0$ שמכונה פתרון סינגולרי.

נדגיש שהמושג **פתרון סינגולרי** אינו מושג מתמטי מדויק אלא כינוי עבור פתרון שהושג באופן יוצא דופן.

דוגמה: ניתן לכתוב פתרון כללי עבור המד"ר $y' = 2xy^2$ בשני אופנים:

$$y = -\frac{1}{x^2 + C} \quad \text{או} \quad y = \frac{c}{1 - cx^2}$$

במקרה השמאלי, $y \equiv 0$ אינו כלול. במקרה הימני, $y = -\frac{1}{x^2}$ אינו כלול.

לכן בלי לדעת באיזו שיטה השתמש פותר המשוואה, אין אפשרות לקבוע מה יהיה עבורו פתרון סינגולרי.

משוואות מטיפוס הומוגני

דוגמה: נתונה המד"ר $y' = \frac{x+y}{x}$, אותה ניתן לכתוב $y' = 1 + \frac{y}{x}$.

נעשה הצבה $z = \frac{y}{x}$ (כלומר, $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ היא פונקצית עזר נעלמת) ונקבל $y = xz$ ולכן $y' = z + xz'$. כלומר $z + xz' = 1 + z$ ולכן $xz' = 1$ פרידה. נפתור ונקבל

$$z' = \frac{1}{x} \Rightarrow z = \ln|x| + C \Rightarrow y = x \ln|x| + Cx$$

הגדרה: מד"ר מטיפוס הומוגני היא מד"ר מהצורה $y' = F(\frac{y}{x})$ כאשר $F(t)$ פונקציה של משתנה אחד.

לא מדובר במד"ר לינארית הומוגנית, השם דומה אך זה לא אותו דבר.

הערה: ניתן לזהות אם המד"ר $y' = f(x, y)$ היא מטיפוס הומוגני על ידי כלל האצבע $f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$ לכל סקלר חיובי α .

כדי לפתור מציבים $z = \frac{y}{x}$ ומקבלים $z + xz' = F(z)$ שהיא תמיד פרידה:

$$\frac{z'}{F(z) - z} = \frac{1}{x} \Rightarrow G(z) = \ln|x| + C$$

כאשר $G(t)$ פונקציה קדומה של $\frac{1}{F(t)-t}$.

נתייחס מיד לפתרונות סינגולריים שמתקבלים מתוך $F(z) - z = 0$.

דוגמה: $y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$. כאן $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$ ולכן מדובר בטיפוס הומוגני. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $z + xz' = z^2 + 2z$. לכן

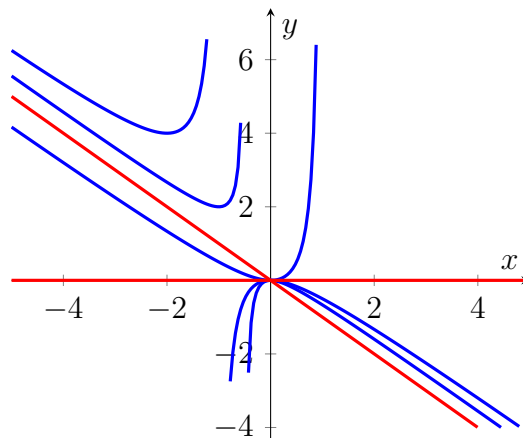
$$\frac{z'}{z^2 + z} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln \left| \frac{z}{z+1} \right| = \ln|x| + C$$

לכן נקבל $\frac{z}{z+1} = cx$ עבור $c \neq 0$, כלומר $z = \frac{cx}{1-cx}$. לכן $y = \frac{cx^2}{1-cx}$.

אם $z^2 + z = 0$ אז $z = 0, -1$ ונקבל $y = 0, -x$.

אפשר לכלול את $y \equiv 0$ בפתרון הכללי על ידי אפשר $c = 0$.

מספר פתרונות רגילים בכחול, והסינגולרים באדום:



אם $z_0 \in \mathbb{R}$ מקיים $F(z_0) - z_0 = 0$ אז יש פתרון $\frac{y}{x} = z \equiv z_0$. לכן הפתרונות הסינגולריים הם $y = z_0 x$. אלו ישרים שעוברים בראשית (אך לא מוגדרים בראשית).

1.2 תפירה של פתרונות

דוגמה פשוטה של תפירת פתרונות

נתונה בעית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = -\sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

המד"ר מתארת כמות מים בדלי שמתרוקן. המשמעות של התנאי הנלווה היא בזמן 1, הדלי ריק.

נמצא ראשית פתרונות של המד"ר, ללא התייחסות לתנאי ההתחלה. זו מד"ר פרידה:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = -1$$

נפתור ונקבל

$$y = \left(c - \frac{x}{2}\right)^2, \quad x \leq 2c$$

נעיר שתחום ההגדרה תואם לכך שלפי המד"ר צריך להתקיים $y' \leq 0$.

בנוסף, יש פתרון סינגולרי $y \equiv 0$.

כעת נחפש פתרונות של בעיית ההתחלה כולה.

ראשית, התנאי $y(1) = 0$ מתקיים עבור הפתרון הסינגולרי $y \equiv 0$.

גם $y(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)^2$ הוא פתרון שמקיים $y(1) = 0$, שמוגדר עבור $x \leq 1$.

למעשה יש אינסוף פתרונות: כל עוד $c < \frac{1}{2}$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(c - \frac{x}{2}\right)^2 & x \leq 2c \\ 0 & x > 2c \end{cases}$$

הוא פתרון שמקיים $y(1) = 0$. בדקו שהפונקציה הזו באמת גזירה בנקודה $x = 2c$.

כלומר, יש אינסוף פתרונות עבור בעיית ההתחלה. זה הגיוני: אם הדלי ריק בזמן 1, לא ידוע אם בדיוק סיים להתרוקן ברגע זה או שהיה ריק כבר זמן מה. אולי אפילו היה ריק מאז ומעולם.

תפירה פשוטה של פתרונות

בתפירה פשוטה לוקחים שני פתרונות שכל אחד מהם מוגדר בקטע, ותופרים אותם יחד. מדובר בתפירה פשוטה כי באופן כללי, אם שני פתרונות של $y' = f(x, y)$ נחתכים, אז הם חייבים להשיק בנקודת החיתוך.

על כך מדבר המשפט הבא.

משפט 1: תהי $y' = f(x, y)$ מד"ר מסדר 1. נניח כי y_1 פתרון של המד"ר בקטע $(a, b]$ וכן y_2 פתרון של המד"ר בקטע $[b, c)$. נניח לבסוף כי $y_1(b) = y_2(b)$. אז פונקציית התפר

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b] \\ y_2(x), & x \in [b, c) \end{cases}$$

היא פתרון של המד"ר בקטע (a, c) .

נזכיר שפתרון בקטע שכולל קצה פירושו שבקצה זה הפונקציה גזירה חד-צדדית ומתקיים $y'_\pm(b) = f(b, y(b))$.

תפירה מתקדמת של פתרונות

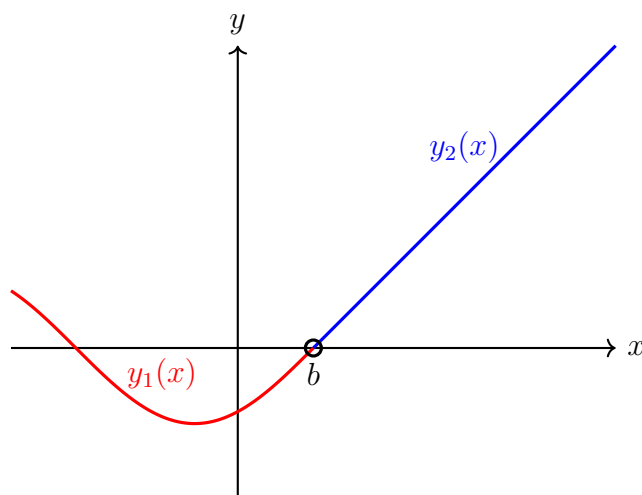
משפט 2: תהי $y' = f(x, y)$ מד"ר מסדר 1. נניח כי y_1 פתרון של המד"ר בקטע (a, b) וכן y_2 פתרון של המד"ר בקטע (b, c) . נניח בנוסף כי

$$\lim_{x \rightarrow b^-} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} y_2(x) = \alpha$$

וכי הפונקציה $f(x, y)$ רציפה בנקודה (b, α) . אז הפונקציה

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b) \\ \alpha, & x = b \\ y_2(x), & x \in (b, c) \end{cases}$$

היא פתרון של המד"ר בקטע (a, c) .



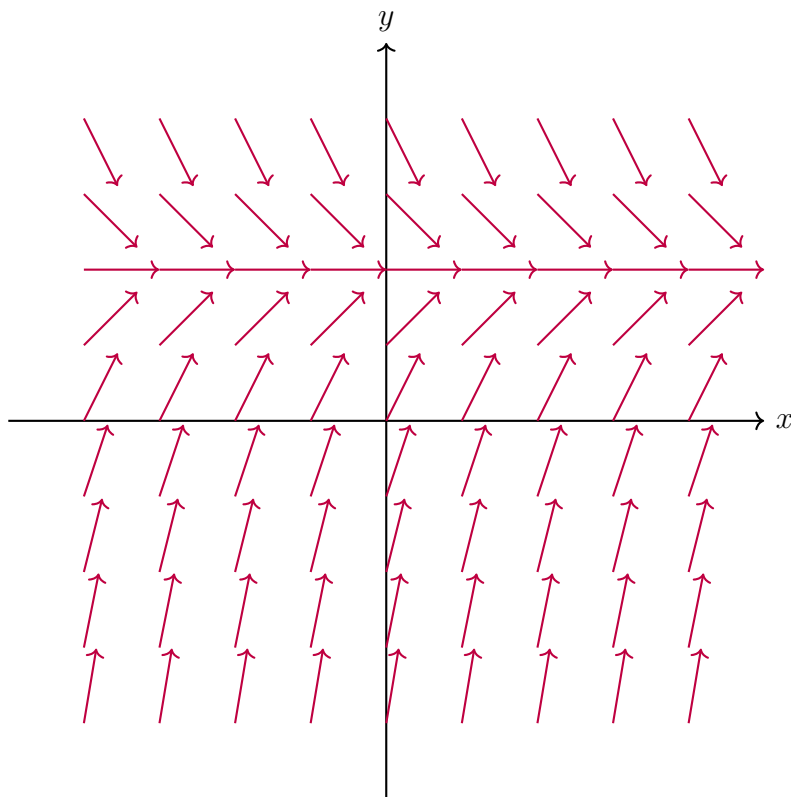
1.3 פירוש ופיענוח גיאומטרי

שדה כיוונים

הגדרה: בהינתן $y' = f(x, y)$, שדה הכיוונים של המד"ר הוא מישור xy כך שבכל נקודה (x, y) בתחום ההגדרה של המד"ר מציירים וקטור באורך קבוע עם שיפוע $f(x, y)$.

דוגמאות:

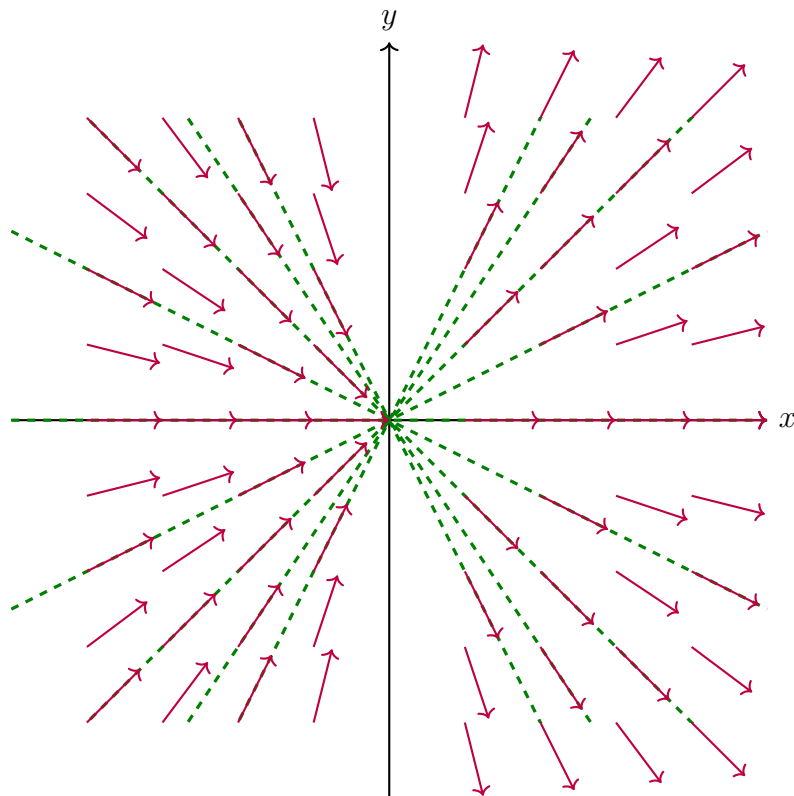
1. נתונה המד"ר $y' + y = 2$. הפתרון הכללי שלה הוא $y = 2 + Ce^{-x}$. נכתוב $y' = 2 - y$ ונשרטט שדה כיוונים.



2. נתונה המד"ר $y' = \frac{y}{x}$.

כאן $f(x, y) = c$ כאשר $\frac{y}{x} = c$, כלומר $y = cx$. קו כזה נקרא **איזוקלינה** (נגדיר במדויק מיד).

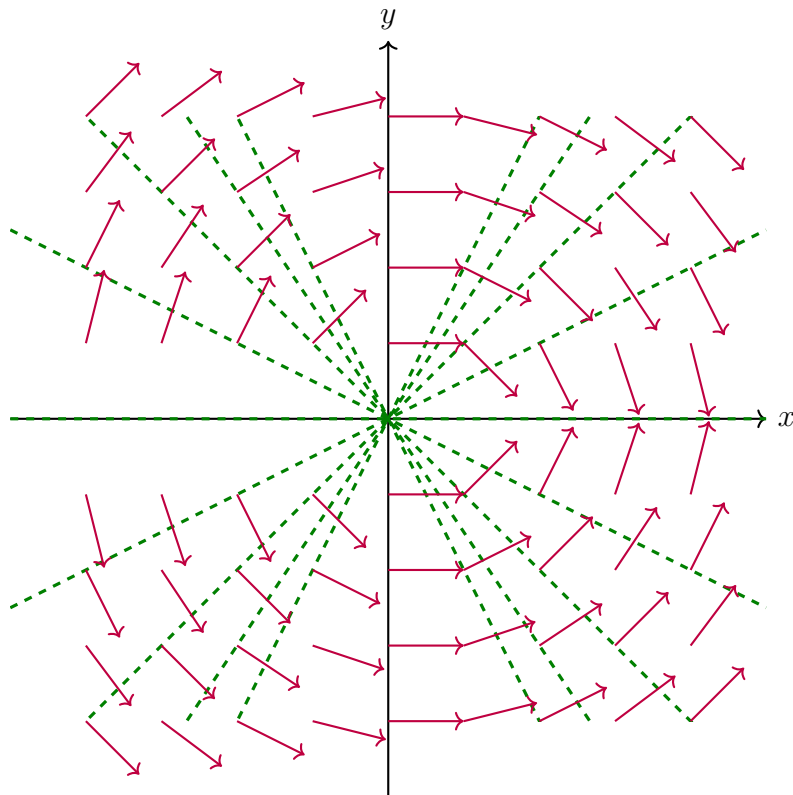
על כל קו כזה, הוקטורים בשדה הכיוונים של המד"ר זהים לכל אורך הקו. נעיר שאלו ישרים אשר עוברים בראשית.



זה מאפשר גם לנחש פתרון כללי $y = cx$ כי הקווים הללו מקיימים שהשיפועים שלהם תואמים את שדה הכיוונים.

3. נתונה המד"ר $y' = -\frac{x}{y}$.

כאן f קבועה על הקווים $-\frac{x}{y} = c$, שזה כמו $y = Cx$. במקרה זה הערך של השיפוע y' הוא דווקא $-\frac{1}{C}$. כלומר, נקבל בכל נקודה על הישר $y = Cx$ חץ שמאונך לישר.



מתברר שהפתרונות הם חלקי מעגלים. אפשר לפתור באופן מדויק היות שהמד"ר מטיפוס הומוגני.

איזוקלינות ונולקלינות

הגדרה:

1. איזוקלינה של $y' = f(x, y)$ היא קו בשדה הכיוונים שעליו $f(x, y)$ קבועה.

2. נולקלינה של $y' = f(x, y)$ היא קו בשדה הכיוונים שעליו $f(x, y) = 0$.

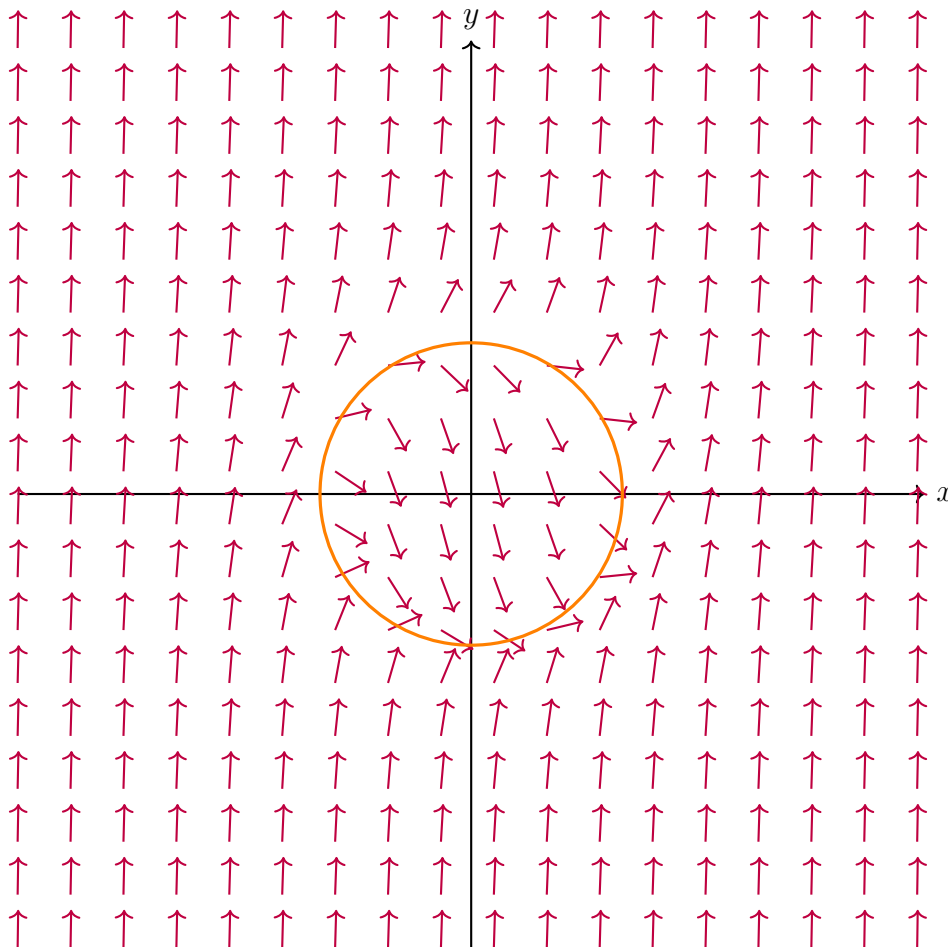
דוגמאות:

1. נתונה המד"ר $y' = x^2 + y^2 - 4$.

האיזוקלינות הן $x^2 + y^2 - 4 = c$.

הנולקלינה (כלומר, עבור $c = 0$) היא מעגל ברדיוס 2.

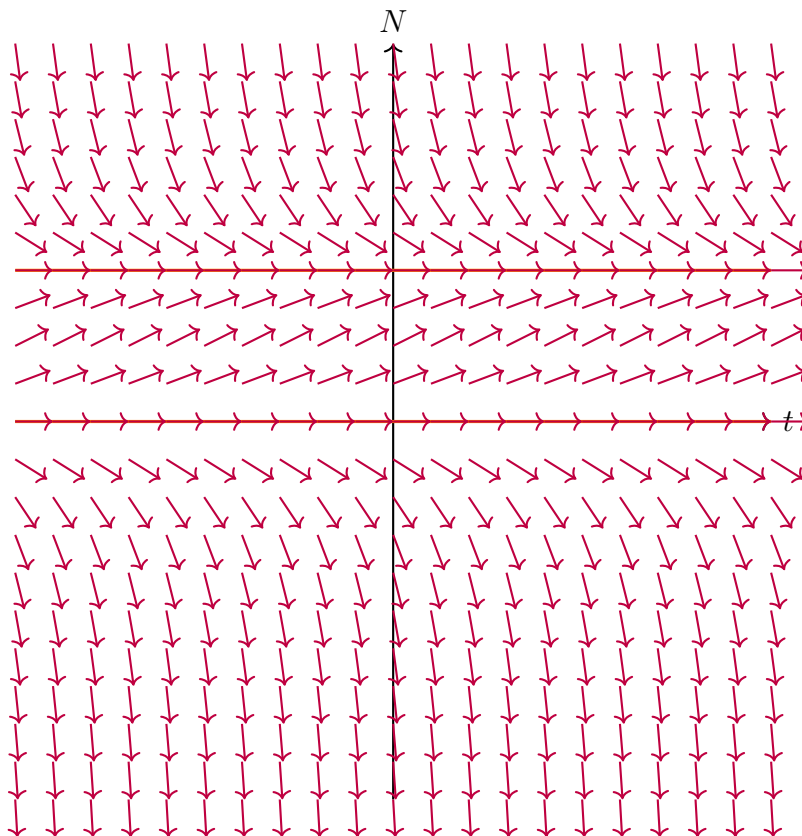
לא קשה לראות שעל האיזוקלינות שבתוך הנולקלינה נקבל שיפועים שליליים ועל האיזוקלינות שמחוץ לנולקלינה נקבל שיפועים חיוביים.



2. נצייר שדה כיוונים עבור המשוואה הלוגיסטית $N' = kN \left(1 - \frac{N}{L}\right)$.

לצורך הציוור ניקח $k=1$, $L=2$ ונקבל את המד"ר $N' = N \left(1 - \frac{N}{2}\right)$.

הנולקלינות הן $N=0$, $N=2$. ביניהן השיפועים חיוביים ואחרת שליליים.



האזור $N < 0$ לא מתחבר לאינטואיציה, כי $N(t)$ אמור לייצג גודל של אוכלוסייה.

אבל באזור $N > 0$, רואים שגודל האוכלוסייה "נמשך" אל הערך הקבוע $N=2$.

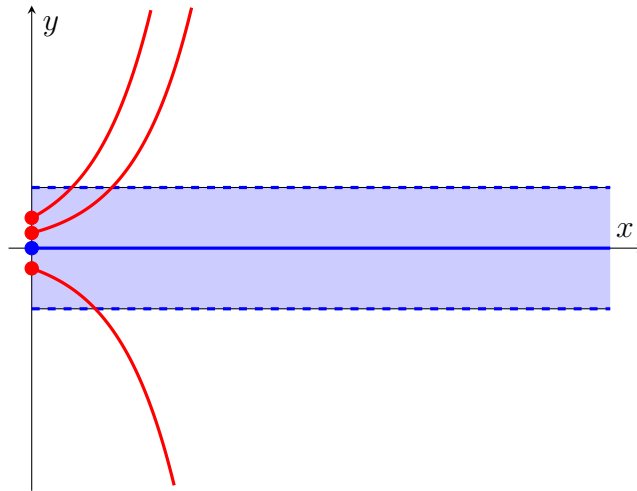
1.4 יציבות ויציבות אסימפטוטית

יציבות

דוגמאות:

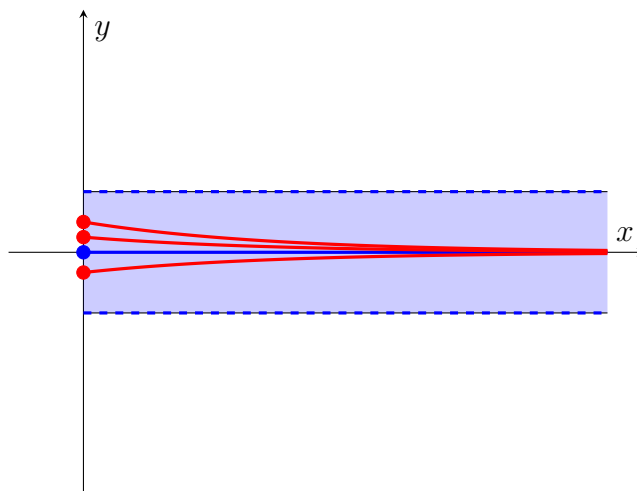
1. נתונה המד"ר $y' = 2y$. הפתרון הכללי שלה הוא $y = ce^{2x}$.

ניקח את הפתרון $y = 0$ בתור דוגמה. אם נתחיל מהנקודה $x_0 = 0$ בערך שקרוב לערך $y_0 = 0$ אך שונה ממנו, אז לאורך זמן הפתרון יתרחק מאוד מאפס.



במצב כזה נאמר שהפתרון $y \equiv 0$ אינו יציב.

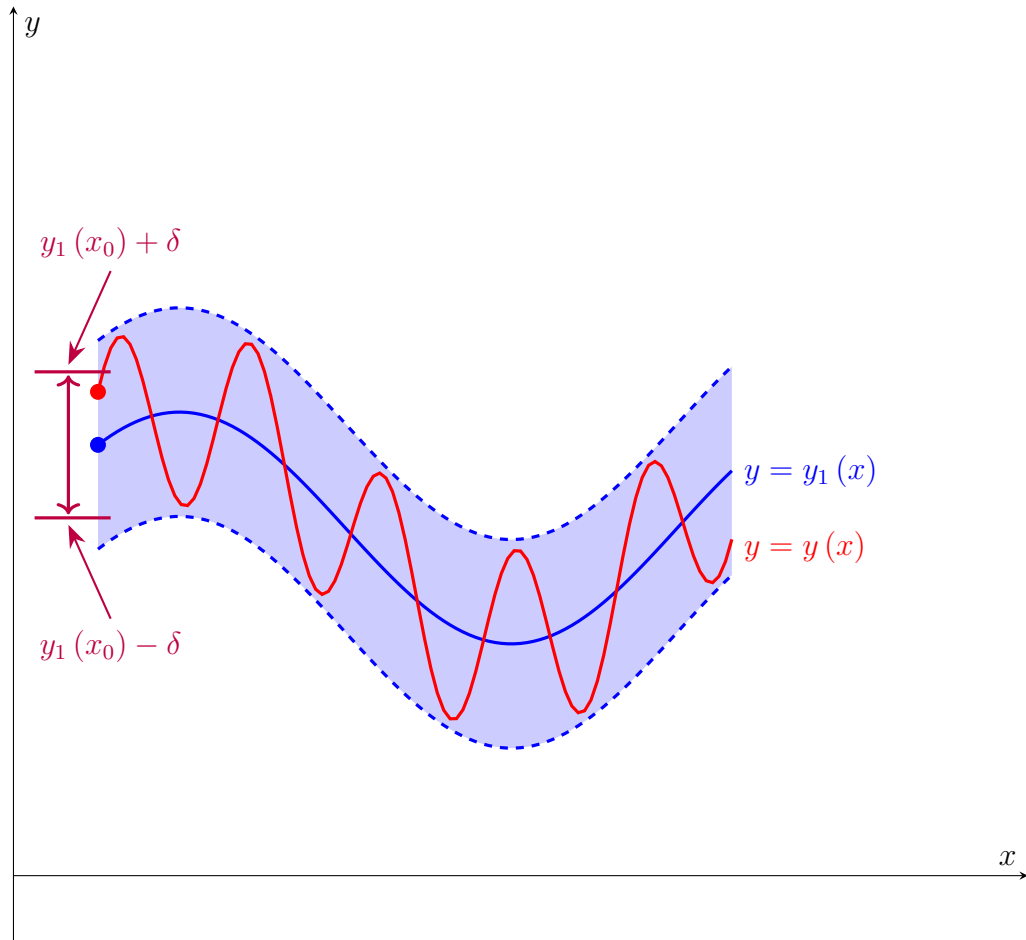
2. נתונה המד"ר $y' = -2y$. הפתרון הכללי שלה הוא $y = ce^{-2x}$. אם נתחיל מהנקודה $x_0 = 0$ בערך שקרוב לערך $y_0 = 0$ אך שונה ממנו, אז לאורך זמן הפתרון יתרחק מאוד מאפס.



כעת הפתרון $y = 0$ הוא יציב ביחס לשינויים בנקודה $x_0 = 0$.

בעצם, צריך לדייק. בשתי הדוגמאות חשבנו על התקדמות לכיוון ימין. הנה ההגדרה המדויקת.

הגדרה 3. תהי $F(x, y, y') = 0$ מד"ר מסדר 1 ויהי $y_1(x)$ פתרון של המד"ר שמוגדר בקטע $[x_0, \infty)$. נאמר שהפתרון $y_1(x)$ הוא יציב בקטע $[x_0, \infty)$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל פתרון $y(x)$ של המד"ר שמקיים $|y(x_0) - y_1(x_0)| < \delta$ מתקיים כי $y(x)$ מוגדר בקטע $[x_0, \infty)$ ובנוסף $|y(x) - y_1(x)| < \varepsilon$ לכל $x \geq x_0$.



באופן דומה מגדירים עבור יציבות בקטע $(-\infty, x_0]$.

הערה: לעיתים אומרים "יציב מימין ל- x_0 " או "עבור $x \rightarrow \infty$ " (ובאופן דומה, משמאל או עבור $x \rightarrow -\infty$).

דוגמאות:

1. עבור המד"ר $y' = 2y$, אמרנו אינטואיטיבית שהפתרון $y = 0$ אינו יציב עבור $x \rightarrow \infty$.

נוכיח: נבחר $\varepsilon = 1$. נראה שלכל $\delta > 0$ קיים פתרון $y(x)$ של המד"ר שמקיים מצד אחד $|y(0) - 0| < \delta$ ומצד שני

$$|y(x) - 0| > \varepsilon = 1$$

עבור איזשהו $x > 0$.

ניקח למשל את $y(x) = \frac{\delta}{2}e^{2x}$. זהו פתרון של המד"ר שמקיים $y(0) = \frac{\delta}{2}$, ולכן

$$|y(0)| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

מצד שני, $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$ ולכן בוודאי קיים $x > 0$ עבורו $y(x) > 1$.

בעצם, כל הפתרונות אינם יציבים. נסו להוכיח (דומה מאוד לנ"ל).

2. נתונה המד"ר $y' = -2y$, אמרנו אינטואיטיבית שהפתרון $y = 0$ הוא יציב עבור $x \rightarrow \infty$.

נוכיח: יהי $\varepsilon > 0$. נשים לב שלכל פתרון $y(x) = ce^{-2x}$ מתקיים כי

$$|y(x) - 0| = |ce^{-2x}| \leq |c| = |y(0)|, \quad \forall x > 0$$

לכן אם נבחר $\delta = \varepsilon$, אז לכל פתרון $y(x)$ שמקיים $|y(0) - 0| < \delta$ מתקיים כי

$$|y(x) - 0| \leq |y(0)| < \delta = \varepsilon$$

בעצם, כל הפתרונות יציבים. נסו להוכיח (דומה מאוד לנ"ל).

יציבות אסימפטוטית

דוגמאות:

1. בדוגמה $y' = -2y$, הפתרון $y = 0$ הוא יציב אסימפטוטית מימין: אם $\tilde{y}(x)$ פתרון שמקיים כי $\tilde{y}(0) = 0$ קרוב ל- $y(0) = 0$ אז למעשה $\lim_{x \rightarrow \infty} |\tilde{y}(x) - y(x)| = 0$.

בעצם, כל הפתרונות יציבים אסימפטוטית.

2. עבור $y' = 5$, הפתרון הכללי הוא $y(x) = 5x + c$.

ניקח $x_0 = 1$. הפתרון $y = 5x$ הוא יציב כי המרחק בין כל שני פתרונות הוא קבוע. כלומר, אפשר לבחור $\delta = \varepsilon$. אבל y אינו יציב אסימפטוטית.

בעצם, זה המצב עבור כולם.

הגדרה: תהי $F(x, y, y') = 0$ מד"ר מסדר 1 ויהי y_1 פתרון של המד"ר שמוגדר בקטע $[x_0, \infty)$.

נאמר שהפתרון y_1 הוא יציב אסימפטוטית בקטע $[x_0, \infty)$ אם הוא יציב בקטע ובנוסף קיים $\delta > 0$ כך שלכל פתרון y של המד"ר שמקיים $|y(x_0) - y_1(x_0)| < \delta$ מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow \infty} |y(x) - y_1(x)| = 0$.

באופן דומה מגדירים יציבות אסימפטוטית בקטע $(-\infty, x_0]$.

הערה: לעיתים אומרים "יציב אסימפטוטית מימין ל- x_0 " או "עבור $x \rightarrow \infty$ ".

לפעם הבאה

מומלץ לעשות חזרה קצרה על המושגים הבאים לפני ההרצאה הבאה:

1. נגזרות חלקיות של פונקציה בשני משתנים $F(x, y)$.
2. כלל השרשרת במספר משתנים לגזירה של ביטוי מורכב כמו $F(x, y(x))$.
3. פונקציות פוטנציאל שדה משמר בפיסיקה.
4. משפט לגרנז' מחדו"א ב'1.

“ Once you’ve got a task to do, it’s better to do it than to live with the fear of it.

”

Joe Abercrombie, The First Law Trilogy